Polytech' Paris-Sud 2011–2012
Orsay PeiP1-S1-Math

TEST DE MATHÉMATIQUES
questions pour le contrôle en TD
Décembre 2011

Attention, ce document comporte 2 pages (et 20 questions).
Pour chaque assertion, dire si elle est vraie ou fausse, avec justification.

Dans les trois premières questions on s'intéresse aux symétries d'une courbe paramétrée $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ définie pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Si x et y sont T-périodiques pour un certain $T > 0$ alors on peut se restreindre, pour étudier la courbe γ et tracer la trajectoire à l'intervalle $[0, T/2]$.

2. Si, pour tout réel t, $x(-t) = y(t)$ et $y(-t) = x(t)$, alors la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première diagonale).

3. Si, pour tout réel t, $x(-t) = -y(t)$ et $y(-t) = -x(t)$, alors la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

4. Considérons les courbes paramétrées $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ suivantes
$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (x_1(t), y_1(t)) = (\cos(t), \sin(t)), && t \in \mathbb{R},\\
\gamma_2(t) &= (x_2(t), x_2(t)) = (\cos(t), \sin(t)), && t \in]-\pi, \pi[,\\
\gamma_3(t) &= (x_3(t), y_3(t)) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right), && t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$
On note Γ_j la courbe associée à γ_j $(j = 1, 2, 3)$. On a $\Gamma_1 = \Gamma_2$ et $\Gamma_2 = \Gamma_3$.

5. La courbe plane associée au paramétrage $(x(t), y(t)) = (|t|, t)$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ est la droite d'équation $y = x$.

6. La courbe paramétrée $(x(t), y(t)) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ définie pour $t \in [0, +\infty[$ n'a pas de point multiple.

7. Il existe une courbe paramétrée telle que la courbe plane associée est la lettre O. Il en est de même pour chacune des lettres de l'alphabet (illustrer un principe de construction sur quelques lettres exemplaires : p.ex. A, E, X).

8. Considérons une courbe paramétrée $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, avec $\gamma \in C^1([0, 1])$. On suppose que cette courbe satisfait $x^2(t) + y^2(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors nécessairement la longueur de γ est inférieure à 2π.

9. Si $\gamma\colon [0,2] \to \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée de classe C^1 telle que la vitesse instantanée est toujours inférieure à 1 alors la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ est inférieure à 2.

10. Soient r et θ deux fonctions (de classe C^1) définies sur un intervalle I et Γ la courbe paramétrée par $x(t) = r(t)\cos\theta(t)$, $y(t) = r(t)\sin\theta(t)$. La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1, $t_0 < t_1$ est donnée par la formule

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t)\theta'(t))^2}\, dt$$

11. La courbe paramétrée définie par $x(t) = 2 + 3\cos t$, $y(t) = 2\sin t$ est contenue dans l'hyperbole d'équation cartésienne $x^2 - 4x + 9y^2 = 20$.

12. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

13. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 2y^2 - 1 > 0\}$. La fonction $f : D \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 1}$ est de classe C^2 sur D.

14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnant la température en chaque point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dans un certain modèle météorologique. On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Soit $\gamma(t), t \in [0,1]$ la trajectoire d'un avion dans le plan. Si le produit scalaire $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle < 0$ pour tout $t \in [0,1]$ alors la température de l'avion à l'instant 0 est inférieure à celle à l'instant 1.

15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, il existe alors une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, dont le gradient ne s'annule jamais telle que le graphe de f est la ligne de niveau 0 de g.

16. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \cos(x+y) + \cos(x-y) + xy$ admet un maximum local en $(0,0)$.

17. Le DL_2 de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \cos(x+y) + \cos(x-y) + xy$ en $(0,0)$ est $2 - 2x^2 - 2y^2 + xy$.

18. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x^2+y^4)(2+\cos(x+y^2))$ n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}^2$.

19. L'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ |x-y| + |x+y| = 4\}$ est localement le graphe $y = \phi(x)$ d'une fonction $\phi \in C^1$ au voisinage de chacun de ses points.

20. L'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ |x-y|^2 + |x+y|^2 = 16\}$ est localement le graphe $y = \phi(x)$ d'une fonction $\phi \in C^1$ au voisinage de chacun de ses points.