Université Claude Bernard - Lyon 1 2025-2026
M1 : Processus stochastiques

Examen – 2h – 29 Mai 2026
Documents, téléphones portables, calculatrices interdits

Exercice 1. Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(U_0, \dots, U_n)$. On définit

$$T = \inf\{n \geqslant 0 : U_n = 1\},$$

et pour $n \geqslant 0$, on pose $X_n = \frac{1}{q^n}\mathbf{1}_{\{T>n\}}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge p.s. vers 0.
3. La martingale $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle bornée dans L^1 ? dans L^2 ?
4. La martingale $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge-t-elle dans L^1 ?
5. La suite $Y_n = \sqrt{X_n}$ est-elle uniformément intégrable ?

Dans la suite on admettra l'inégalité d'Azuma-Hoeffding, qui dit en particulier que si $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale telle que $M_0 = 0$ et p.s. $|M_{i+1} - M_i| \leqslant c_i$, pour tout $i \geqslant 0$, alors pour tout $t > 0$ et tout $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(|M_n| \geqslant t) \leqslant 2\exp\Big(-\frac{t^2}{2\sum_{i=0}^{n-1} c_i^2}\Big).$$

Exercice 2. On considère une urne contenant initialement pN boules rouges et $N(1-p)$ boules bleues, où $p \in [0,1]$. On tire successivement des boules dans l'urne, uniformément au hasard, et sans remise, si bien que pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, le nombre de boules restantes dans l'urne après n tirages est $N-n$. On pose $R_0 = pN$, et pour $n \geqslant 1$, on note R_n le nombre de boules rouges dans l'urne à l'issue des n premiers tirages, et $M_n = \frac{R_n}{N-n}$ la proportion correspondante.

1. Montrer que $(M_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une martingale.
2. Montrer que pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$,
$$|M_{n+1} - M_n| \leqslant \frac{1}{N-n}.$$
3. Pour $n \geqslant 0$, on note $\widetilde{R}_n = pN - R_n$, le nombre de boules rouges qui sont sorties après n tirages. Montrer que pour tout $\alpha \in (0,1)$, et tout $n \in \{1, \dots, N\}$,
$$I_{n,\alpha} := \Big[\frac{\widetilde{R}_n}{n} - \sqrt{\frac{2\log(2/\alpha)}{n}}, \frac{\widetilde{R}_n}{n} + \sqrt{\frac{2\log(2/\alpha)}{n}}\Big],$$
est un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance $1-\alpha$ (i.e. $\mathbb{P}(p \in I_{n,\alpha}) \geqslant 1-\alpha$).

Exercice 3. Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$, telle que $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty$ pour tout $n \geqslant 0$, et telle que $M_0 = 0$. On pose $A_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[(M_{k+1} - M_k)^2 \mid \mathcal{F}_k].$$

On rappelle que le processus $(M_n^2 - A_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale, et pour $h \geqslant 0$, on note

$$T_h = \inf\{n \geqslant 0 : |M_n| \geqslant h\}.$$

On suppose que p.s. $\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n] \leqslant 1$, pour tout $n \geqslant 0$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$,
$$\mathbb{E}[M_{n\wedge T_h}^2] \leqslant \mathbb{E}[T_h].$$
2. En déduire que $\mathbb{E}[T_h] \geqslant h^2$.
3. On suppose maintenant qu'il existe une constante $a > 0$, telle que p.s. pour tout $n \geqslant 0$,
$$\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n] \geqslant a, \quad \text{et} \quad |M_{n+1} - M_n| \leqslant 1.$$
   (a) Montrer qu'il existe $C > 0$, tel que $\mathbb{P}(T_h \leqslant Ch^2) \geqslant \frac{1}{2}$, pour tout $h \geqslant 1$.
   (b) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction C^1 croissante, et X une variable aléatoire positive. Montrer que pour tout $a \geqslant 0$,
$$\mathbb{E}[f(X)\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}}] \leqslant \int_a^\infty f'(t) \cdot \mathbb{P}(X \geqslant t)\, dt.$$
   (c) Montrer qu'il existe $C > 0$, tel que $\mathbb{E}[M_k^2 \mathbf{1}_{\{|M_k|\geqslant C\sqrt{k}\}}] \leqslant \frac{ak}{2}$, pour tout $k \geqslant 1$.
   (d) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\mathbb{P}(|M_k| \geqslant \varepsilon\sqrt{k}) \geqslant \varepsilon$, pour tout $k \geqslant 1$.
   (e) Retrouver le résultat de la question (a).