
Examen – 2h – 29 Mai 2026
Documents, téléphones portables, calculatrices interdits

Exercice 1. Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(U_0, \dots, U_n)$. On définit

$$T = \inf\{n \geq 0 : U_n = 1\},$$

et pour $n \geq 0$, on pose $X_n = \frac{1}{q^n} \mathbf{1}_{\{T > n\}}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.

On note que $\{T > n\} = \{T \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n$, et donc X_n est \mathcal{F}_n -mesurable. De plus $X_n \geq 0$, et $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{P}(T > n)/q^n = 1$, donc $X_n \in L^1$. Enfin, pour tout $n \geq 0$, en remarquant que $\{T > n + 1\} = \{T > n\} \cap \{U_{n+1} = 0\}$, et que $\{U_{n+1} = 0\}$ est indépendant de \mathcal{F}_n , on trouve

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{P}(U_{n+1} = 0 | \mathcal{F}_n) \cdot \frac{\mathbf{1}_{\{T > n\}}}{q^{n+1}} = \mathbb{P}(U_{n+1} = 0) \cdot \frac{\mathbf{1}_{\{T > n\}}}{q^{n+1}} = X_n.$$

2. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge p.s. vers 0.

On note que $T < \infty$ p.s., donc p.s. $X_n = 0$ pour tout n assez grand, en particulier (X_n) converge p.s. vers 0.

3. La martingale $(X_n)_{n \geq 0}$ est-elle bornée dans L^1 ? dans L^2 ?

Comme $X_n \geq 0$, $\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[X_n] = 1$, pour tout $n \geq 0$, donc (X_n) est bornée dans L^1 . En revanche $\mathbb{E}[X_n^2] = 1/q^n$, donc (X_n) n'est pas bornée dans L^2 .

4. La martingale $(X_n)_{n \geq 0}$ converge-t-elle dans L^1 ?

Si (X_n) convergerait dans L^1 , cela voudrait dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = 0$, car la limite dans L^1 , devrait coïncider avec la limite presque sûre, et on a vu que ce n'est pas le cas. Donc (X_n) ne converge pas dans L^1 .

5. La suite $Y_n = \sqrt{X_n}$ est-elle uniformément intégrable ?

Oui, car elle est bornée dans L^2 . Plus spécifiquement pour tout $\varepsilon > 0$, en posant $C = 1/\varepsilon$, et en utilisant l'inégalité $\mathbf{1}_{\{|Y_n| \geq C\}} \leq |Y_n|/C$, on trouve que pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[|Y_n| \mathbf{1}_{\{|Y_n| \geq C\}}] \leq \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{C} = \varepsilon.$$

Dans la suite on admettra l'inégalité d'Azuma-Hoeffding, qui dit que si $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale telle que $M_0 = 0$ et p.s. $|M_{i+1} - M_i| \leq c_i$, pour tout $i \geq 0$, alors pour tout $t > 0$ et tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(|M_n| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2}\right).$$

Exercice 2. On considère une urne contenant initialement pN boules rouges et $N(1-p)$ boules bleues, où $p \in [0, 1]$. On tire successivement des boules dans l'urne, uniformément au hasard, et sans remise, si bien que pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, le nombre de boules restantes dans l'urne après n tirages est $N - n$. On pose $R_0 = pN$, et pour $n \geq 1$, on note R_n le nombre de boules rouges dans l'urne à l'issue des n premiers tirages, et $M_n = \frac{R_n}{N-n}$ la proportion correspondante.

1. Montrer que $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une martingale.

On note que $(M_n)_{n \geq 0}$ est adaptée à sa filtration naturelle par définition, et bornée, donc intégrable. Ensuite,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \frac{1}{N-n-1} \left((R_n - 1) \cdot \mathbb{P}(R_{n+1} = R_n - 1 \mid \mathcal{F}_n) + R_n \cdot \mathbb{P}(R_{n+1} = R_n \mid \mathcal{F}_n) \right) \\ &= \frac{1}{N-n-1} \left((R_n - 1)M_n + R_n(1 - M_n) \right) = M_n. \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$|M_{n+1} - M_n| \leq \frac{1}{N-n}.$$

$$\begin{aligned} |M_{n+1} - M_n| &= \frac{|R_{n+1}(N-n) - R_n(N-n-1)|}{(N-n)(N-n-1)} = \frac{|(R_n - R_{n+1})(N-n) - R_n|}{(N-n)(N-n-1)} \\ &= \frac{R_n \mathbf{1}_{\{R_{n+1}=R_n\}} + (N-n-R_n) \mathbf{1}_{\{R_{n+1}=R_n-1\}}}{(N-n)(N-n-1)} \leq \frac{1}{N-n}. \end{aligned}$$

3. Pour $n \geq 0$, on note $\tilde{R}_n = pN - R_n$, le nombre de boules rouges qui sont sorties après n tirages. Montrer que pour tout $\alpha \in (0, 1)$, et tout $n \in \{1, \dots, N\}$,

$$I_{n,\alpha} := \left[\frac{\tilde{R}_n}{n} - \sqrt{\frac{2 \log(2/\alpha)}{n}}, \frac{\tilde{R}_n}{n} + \sqrt{\frac{2 \log(2/\alpha)}{n}} \right],$$

est un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance $1 - \alpha$ (i.e. $\mathbb{P}(p \in I_{n,\alpha}) \geq 1 - \alpha$).

On note que $M_0 = p$, et $(M_n - M_0)_{n \geq 0}$ est une martingale nulle au temps 0. Donc d'après la question précédente, et l'inégalité d'Azuma-Hoeffding,

$$\mathbb{P}(|M_n - p| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \frac{n}{(N-n)^2}}\right),$$

pour tout $t > 0$. On note t_α la valeur de t telle que le membre de droite soit égal à α , c'est-à-dire

$$t_\alpha = \frac{1}{N-n} \sqrt{2n \log(2/\alpha)}.$$

Par ailleurs,

$$M_n - p = \frac{pN}{N-n} - p - \frac{\tilde{R}_n}{N-n} = \frac{pn}{N-n} - \frac{\tilde{R}_n}{N-n},$$

d'où l'on trouve

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\tilde{R}_n}{n} - p\right| \geq t_\alpha \frac{N-n}{n}\right) \leq \alpha,$$

ce qui est bien le résultat voulu.

Exercice 3. Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, telle que $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty$ pour tout $n \geq 0$, et telle que $M_0 = 0$. On pose $A_0 = 0$ et pour $n \geq 1$,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[(M_{k+1} - M_k)^2 \mid \mathcal{F}_k].$$

On rappelle que le processus $(M_n^2 - A_n)_{n \geq 0}$ est une martingale, et pour $h \geq 0$, on note

$$T_h = \inf\{n \geq 0 : |M_n| \geq h\}.$$

On suppose que p.s. $\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n] \leq 1$, pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[M_{n \wedge T_h}^2] \leq \mathbb{E}[T_h].$$

D'après le théorème d'arrêt, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[M_{n \wedge T_h}^2] = \mathbb{E}[A_{n \wedge T_h}].$$

Maintenant par hypothèse, $A_k \leq k$, pour tout $k \geq 0$. Donc, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[A_{n \wedge T_h}] = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[A_k \mathbf{1}_{\{n \wedge T_h = k\}}] \leq \sum_{k=0}^n k \cdot \mathbb{P}(n \wedge T_h = k) = \mathbb{E}[n \wedge T_h] \leq \mathbb{E}[T_h].$$

2. En déduire que $\mathbb{E}[T_h] \geq h^2$.

On ne sait pas a priori si T_h est fini p.s., mais si ce n'est pas le cas, alors $\mathbb{E}[T_h] = \infty$, et on a bien le résultat voulu. Donc on peut supposer $T_h < \infty$ p.s. Dans ce cas, $M_{n \wedge T_h}$ converge p.s. vers M_{T_h} , lorsque $n \rightarrow \infty$. Le lemme de Fatou implique alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_{n \wedge T_h}^2] \geq \mathbb{E}[M_{T_h}^2] \geq h^2,$$

où la dernière inégalité est obtenue par définition de T_h . On conclut à l'aide de la question précédente.

3. On suppose maintenant qu'il existe une constante $a > 0$, telle que p.s. pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n] \geq a, \quad \text{et} \quad |M_{n+1} - M_n| \leq 1.$$

(a) Montrer qu'il existe $C > 0$, tel que $\mathbb{P}(T_h \leq Ch^2) \geq \frac{1}{2}$, pour tout $h \geq 1$.

En raisonnant comme à la question 1, on obtient que pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[M_{n \wedge T_h}^2] \geq a \mathbb{E}[n \wedge T_h].$$

Maintenant par hypothèse, p.s. $|M_{n \wedge T_h}| \leq h + 1$, pour tout $n \geq 0$, d'où

$$\mathbb{E}[n \wedge T_h] \leq \frac{(h+1)^2}{a},$$

pour tout $n \geq 0$. Or $n \wedge T_h$ converge en croissant vers T_h , donc le théorème de convergence monotone donne

$$\mathbb{E}[T_h] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[n \wedge T_h] \leq \frac{(h+1)^2}{a}.$$

Maintenant, pour tout $C > 0$,

$$\mathbb{E}[T_h] \geq Ch^2 \cdot \mathbb{P}(T_h \geq Ch^2),$$

et donc pour tout $C > 0$, et tout $h \geq 1$

$$\mathbb{P}(T_h \geq Ch^2) \leq \frac{(h+1)^2}{Cah^2} \leq \frac{4}{Ca}.$$

On en déduit le résultat, en prenant $C = 8/a$.

- (b) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction C^1 croissante, et X une variable aléatoire positive. Montrer que pour tout $a \geq 0$,

$$\mathbb{E}[f(X)\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}] \leq \int_a^\infty f'(t) \cdot \mathbb{P}(X \geq t) dt.$$

Notons déjà que si f est C^1 et croissante l'intégrale a toujours un sens, comme intégrale d'une fonction mesurable positive, et de même pour l'espérance, puisque l'on a supposé $f \geq 0$. Le théorème de Fubini-Tonelli donne alors

$$\int_a^\infty f'(t) \cdot \mathbb{P}(X \geq t) dt = \mathbb{E}\left[\left(\int_a^X f'(t) dt\right)\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}\right] = \mathbb{E}[(f(X) - f(a))\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}] \geq \mathbb{E}[f(X)\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}],$$

en utilisant que $f \geq 0$ pour la dernière inégalité.

- (c) Montrer qu'il existe $C > 0$, tel que $\mathbb{E}[M_k^2 \mathbf{1}_{\{|M_k| \geq C\sqrt{k}\}}] \leq \frac{ak}{2}$, pour tout $k \geq 1$.
D'après la question précédente, on a

$$\mathbb{E}[M_k^2 \mathbf{1}_{\{|M_k| \geq C\sqrt{k}\}}] \leq 2 \int_{C\sqrt{k}}^\infty t \cdot \mathbb{P}(|M_k| \geq t) dt.$$

On applique alors l'inégalité d'Azuma-Hoeffding, ce qui donne

$$\mathbb{E}[M_k^2 \mathbf{1}_{\{|M_k| \geq C\sqrt{k}\}}] \leq 4 \int_{C\sqrt{k}}^\infty t \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right) dt = 4k \int_C^\infty u \exp(-u^2/2) du = 4ke^{-C^2/2}.$$

On obtient le résultat voulu en prenant $C = \sqrt{2 \log(8/a)}$.

- (d) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\mathbb{P}(|M_k| \geq \varepsilon\sqrt{k}) \geq \varepsilon$, pour tout $k \geq 1$.
On a vu que pour tout $k \geq 0$,

$$\mathbb{E}[M_k^2] \geq ak.$$

Or pour tout $\varepsilon > 0$, d'après la question précédente,

$$\mathbb{E}[M_k^2] \leq \varepsilon^2 k + \frac{ak}{2} + \mathbb{E}[M_k^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon\sqrt{k} \leq |M_k| \leq C\sqrt{k}\}}] \leq \varepsilon^2 k + \frac{ak}{2} + C^2 k \cdot \mathbb{P}(|M_k| \geq \varepsilon\sqrt{k}).$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(|M_k| \geq \varepsilon\sqrt{k}) \geq \frac{a}{2C^2} - \frac{\varepsilon^2}{C^2},$$

ce qui donne si $\varepsilon^2 < a/4$,

$$\mathbb{P}(|M_k| \geq \varepsilon\sqrt{k}) \geq \frac{a}{4C^2}.$$

D'où le résultat en prenant par exemple $\varepsilon = a/(4C^2)$.

- (e) Retrouver le résultat de la question (a).
Soit $h \geq 1$ et ε satisfaisant la condition de la question précédente. On pose $k = 4\lceil h^2/\varepsilon^2 \rceil$. Pour tout entier $N \geq 1$, on a

$$\bigcup_{i=0}^{N-1} \left(\{|M_{jk}| \leq h, \forall j \leq i\} \cap \{|M_{(i+1)k} - M_{ik}| \geq 2h\} \right) \subset \{T_h \leq Nk\}.$$

Or les évènements dans l'union sont disjoints, donc

$$\mathbb{P}(T_h \leq Nk) \geq \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{P}(|M_{jk}| \leq h, \forall j \leq i, |M_{(i+1)k} - M_{ik}| \geq 2h).$$

Mais $\varepsilon\sqrt{k} \geq 2h$, donc

$$\mathbb{P}(T_h \leq Nk) \geq \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{|M_{jk}| \leq h, \forall j \leq i\}} \cdot \mathbb{P}(|M_{(i+1)k} - M_{ik}| \geq \varepsilon\sqrt{k} \mid \mathcal{F}_{ik}) \right].$$

Grâce à la question précédente, on en déduit,

$$\mathbb{P}(T_h \leq Nk) \geq \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{P}(|M_{jk}| \leq h, \forall j \leq i) \geq \varepsilon N \cdot \mathbb{P}(T_h > Nk) = \varepsilon N(1 - \mathbb{P}(T_h \leq Nk)).$$

et donc pour N assez grand (tout $N \geq 1/\varepsilon$ convient),

$$\mathbb{P}(T_h \leq Nk) \geq \frac{N\varepsilon}{N\varepsilon + 1} \geq 1/2.$$

Comme $k \leq 8h^2/\varepsilon^2$, on a donc en prenant $A = 8N/\varepsilon^2$,

$$\mathbb{P}(T_h \leq Ah^2) \geq 1/2.$$