
Fiche 1
Espérance conditionnelle

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. Soit $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y=0\}}$.

1. Calculer $\mathbb{E}[X \mid Z]$ et $\mathbb{E}[Y \mid Z]$.
2. Ces deux variables sont-elles encore indépendantes ?

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ. Calculer $\mathbb{E}[\max(X,Y) \mid Y]$ et $\mathbb{E}[\min(X,Y) \mid Y]$.

Exercice 3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables i.i.d. intégrables, et $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer $\mathbb{E}[S \mid X_1]$ et $\mathbb{E}[X_1 \mid S]$.
2. On suppose que les $(X_i)_{i \leqslant n}$ suivent une exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Montrer que S suit une loi Gamma $\Gamma(n, \lambda)$, dont la densité est donnée par
   $$f(s) = \frac{\lambda^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s}.$$
   (b) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant S.

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, et que Y suit une loi exponentielle de paramètre 1. On suppose de plus que la loi conditionnelle de X sachant Y est une loi de Poisson de paramètre Y, i.e. pour tout $k \geqslant 0$, presque sûrement,
$$\mathbb{P}(X = k \mid Y) = \exp(-Y) \frac{Y^k}{k!}.$$
Déterminer la loi de (X, Y), la loi de X, la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$.

Exercice 5. Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1])$ (la loi uniforme sur $[0,1]$). Soit $T = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Quelle est la loi de (X_1, T) ? la loi de X_1 sachant T ?

Exercice 6. Soit $(X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(m, Q)$ où
$$m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la loi du couple (X_1, X_2) ?
2. Déterminer α un réel tel que $Y = \alpha X_1 + X_2$ est indépendante de X_1. Que vaut $\mathbb{E}[Y]$? $\mathrm{Var}(Y)$?
3. En déduire $\mathbb{E}[X_2 \mid X_1]$. Quelle est la loi conditionnelle de X_2 sachant X_1 ?

4. Déterminer un réel β tel que $Z = \beta X_1 + X_3$ est indépendante de X_1. En déduire $\mathbb{E}[X_3 \mid X_1]$ et $\mathbb{E}[X_3^2 \mid X_1]$.

Exercice 7. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^2$ de loi $\mathcal{N}(0, Id)$. Quelle est la loi de $X^2 + Y^2$ sachant $X - Y$?

Exercice 8. On considère le couple (X, Z) de densité jointe

$$f(x, z) = (z - x)\exp(-z)\mathbf{1}_{\{z \geqslant x \geqslant 0\}}.$$

1. Calculer la loi de X, puis celle de Z.
2. En déduire que
$$f_{X|Z=z}(x) = \frac{2(z-x)}{z^2}\mathbf{1}_{\{0 \leqslant x \leqslant z\}}.$$
3. Calculer $\mathbb{E}[X \mid Z]$ puis $\mathrm{Var}(X \mid Z)$.
4. Calculer $f_{Z|X=x}(z)$, puis démontrer que $\mathbb{E}[Z \mid X] = X + 2$.
5. Quelle est la loi du couple $(X, Z - X)$? En déduire la loi de $Z - X$.

Exercice 9. Soit (X, Y) de loi uniforme sur le triangle $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 1\}$. Calculer $\mathbb{E}(Y \mid X)$, $\mathbb{E}(X \mid Y)$, et $\mathbb{E}(X^2 \mid Y)$.