Algèbre linéaire (M202)

Année 2019-2020

1 Espaces vectoriels

1.1 Rappels sur les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Dans tout ce texte, la lettre K désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. L'ensemble K est donc muni d'une loi d'addition, notée $+$ et d'une loi de multiplication, notée parfois $\times$, mais le plus souvent par le symbole $\cdot$. Ces deux lois vérifient les propriétés suivantes :

- elles sont *associatives* : si $(a, b, c) \in K^3$, alors $a + (b + c) = (a + b) + c$ et $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. Cela signifie que pour additionner trois nombres a, b et c, on peut commencer par additionner a et b, puis additionner a+b et c ou alors commencer par additionner b et c puis additionner a et $b+c$, le résultat sera le même. On note donc ce résultat $a+b+c$ car, quelque soit la position des parenthèses, il ne change pas. De même on note $a \cdot b \cdot c$ pour $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- elles sont *commutatives* : si $(a, b) \in K^2$, alors $a + b = b + a$ et $a \cdot b = b \cdot a$.
- elles possèdent un *élément neutre*. L'élément neutre pour l'addition est l'élément 0 : pour tout $a \in K$, $a + 0 = 0 + a = a$. L'élément neutre pour la multiplication est l'élément 1 : pour tout $a \in K$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Attention l'élément neutre de l'addition diffère de l'élément neutre de la multplication.
- la loi de multiplication est *distributive* par rapport à la loi d'addition, cela signifie que si $(a, b, c) \in K^3$, alors $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$. Par commutativité, on a aussi $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.
- tout élément de K, possède un *inverse* pour la loi d'addition. En effet si $a \in K$, alors $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Dans le cadre de la loi d'addition, l'inverse d'un élément est souvent appelé *opposé*.
- tout élément <u>non nul</u> de K possède un inverse pour la loi de multiplication. En effet si $a \in K^\times := K \smallsetminus \{0\}$, alors $a \cdot (a^{-1}) = (a^{-1}) \cdot a = 1$. Il est nécessaire de supposer a non nul car l'élément 0 n'a pas d'inverse pour la loi de multiplication : pour tout $a \in K$, on a $a \cdot 0 = 0$, on ne peut donc pas trouver d'élément $b \in K$ tel que $a \cdot b = 1$.

Exemple 1.1. Lorsque $K = \mathbb{C}$, on a $i \cdot i = i^2 = -1$. Ainsi $(-i) \cdot i = (-1) \cdot i \cdot i = (-1)^2 = 1$, donc $-i$ est l'inverse de i pour la loi de multiplication dans $\mathbb{C}$.

1.2 Espaces vectoriels

Un K-espace vectoriel (ou tout simplement espace vectoriel quand le corps K est sous-entendu) est un ensemble E muni de deux lois de composition

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x. \end{array}$$

Ces deux lois doivent vérifier les propriétés suivantes

a) (i) La loi $+$ est *associative* :

$$\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, \quad (x + y) + z = x + (y + z).$$

(ii) Il existe un unique élément neutre $0 \in E$ pour la loi $+$:

$$\forall x \in E, \quad x + 0 = 0 + x = x.$$

(iii) Tout élément $x \in E$ possède un unique inverse $-x \in E$ pour la loi $+$:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

(iv) La loi $+$ est *commutative* :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad x + y = y + x.$$

b) La loi $\cdot$ est distributive par rapport aux lois $+$ de E et K :

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, x, y) \in K \times E \times E, &\quad \lambda \cdot (x + y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y) \\ \forall (\lambda, \mu, x) \in K \times K \times E, &\quad (\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x). \end{aligned}$$

c) La loi $\cdot$ est compatible à la multiplication dans K :

$$\forall (\lambda, \mu, x) \in K \times K \times E, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \mu) \cdot x, \quad 1 \cdot x = x.$$

Dans la pratique, on écrit très souvent λx pour $\lambda \cdot x$.

Les éléments de l'ensemble E sont appelés *vecteurs* et les éléments du corps K sont appelés *scalaires*. Il faut bien prendre garde au fait que les lois $+$ et $\cdot$ sont définies sur des ensembles différents. La loi $+$ part de deux vecteurs et produit un vecteur alors que la loi $\cdot$ part d'un scalaire et d'un vecteur et produit un vecteur. Si λ est un scalaire et v un vecteur, il faut imaginer le vecteur $\lambda \cdot v$ comme étant le vecteur v dilaté au moyen du coefficient λ.

Exemple 1.2. 1. Soit E un K-espace vectoriel. Si $x \in E$, on a $0 \cdot x + 0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x$. On en déduit $0 \cdot x = 0$ pour tout $x \in E$.

2. D'après la loi de distributivité, pour $x \in E$, on a $x + (-1)x = (1-1)x = 0x = 0$. Ainsi $(-1)x$ est l'inverse de x pour la loi de d'addition et on a donc $(-1)x = -x$.

Exemple 1.3. Si $n \geqslant 1$ est un entier, l'ensemble K^n des n-uplets d'éléments de K est un espace vectoriel pour les lois suivantes. Si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont deux éléments de K^n et $\lambda \in K$, on définit

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \coloneqq (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) \coloneqq (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Si $n = 1$, l'espace vectoriel K^n est juste le corps K et la loi $\cdot$ s'identifie alors à la loi de multiplication dans K.

Exemple 1.4. Notons $K^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de K. Il s'agit d'un K-espace vectoriel pour les opérations suivantes

$$(x_n)_{n\geqslant 0} + (y_n)_{n\geqslant 0} \coloneqq (x_n + y_n)_{n\geqslant 0}, \quad \lambda \cdot (x_n)_{n\geqslant 0} \coloneqq (\lambda x_n)_{n\geqslant 0}.$$

Exemple 1.5. Notons $\mathcal{F}(\mathbb{R}, K)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans K. Il s'agit d'un espace vectoriel, l'addition de deux fonctions est la loi d'addition usuelle sur les fonctions : si f et g sont deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, K)$, la fonction $f + g$ est la fonction prenant la valeur $f(x) + g(x)$ en x. De même on définit la multiplication d'une fonction f par un scalaire λ en définissant $\lambda \cdot f$ comme étant la fonction prenant la valeur $\lambda f(x)$ en x. On peut encore écrire ceci $(\lambda \cdot f)(x) \coloneqq \lambda f(x)$.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.6. *Soit E un K-espace vectoriel. Un sous-K-espace vectoriel de E (ou simplement sous-espace vectoriel lorsque K est sous-entendu) est une partie F de E vérifiant*

(i) $0 \in F$ *;*

(ii) pour tous x et y dans F et λ dans K, on a $x + \lambda y \in F$.

Exemple 1.7. Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble des éléments (x_1, x_2, x_3) vérifiant la relation $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$ est un sous-espace vectoriel. Il s'agit d'un exemple de *sous-espace vectoriel défini par une équation.*

Exemple 1.8. Dans $\mathbb{R}^3$ posons $v = (1, 2, 3)$ et $w = (2, 7, 3)$. Alors l'ensemble

$$\{\lambda v + \mu w \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{\lambda + 2\mu, 2\lambda + 7\mu, 3\lambda + 3\mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Il s'agit d'un exemple de sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, ici les vecteurs v et w.

On peut effectuer des opérations sur les sous-espaces vectoriels afin d'en produire de nouveaux.

Si E est un espace vectoriel et si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels, l'intersection $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble

$$F_1 + F_2 = \{v + w \mid (v, w) \in F_1 \times F_2\}$$

est un sous-espace vectoriel de E appelé *somme* des sous-espaces F_1 et F_2. Plus généralement, si $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels, la partie

$$F_1 + \cdots + F_n = \{x_1 + \cdots + x_n \mid (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n\}$$

est un sous-espace vectoriel de E appelé *somme* de la famille de sous-espaces $(F_1, \ldots, F_n)$.

Si $v \in E$, on note Kv l'ensemble $\{\lambda v \mid \lambda \in K\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E appelé *droite vectorielle* engendrée par v. Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille d'éléments de E, le *sous-espace vectoriel engendré par* $(v_1, \ldots, v_n)$ est noté $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$ et définit par

$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq Kx_1 + \cdots + Kx_n = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n\}.$$

Remarquons que dans l'exemple 1.8, le sous-espace vectoriel peut être défini comme $\mathrm{Vect}(v, w)$.

Soit E un K-espace vectoriel, ainsi que F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Par définition, tout élément de $F_1 + F_2$ s'écrit sous la forme $v + w$ avec $v \in F_1$ et $w \in F_2$. Cette écriture n'est pas toujours unique. Considérons par exemple le cas de $E = \mathbb{R}^3$ avec $F_1 = \mathrm{Vect}((1,2,3),(2,7,3))$ et $F_2 = \mathrm{Vect}((2,1,3),(1,7,3))$. Alors on peut écrire

$$(3,9,6) = (1,2,3) + (2,7,3) = (2,1,3) + (1,8,3).$$

Cependant lorsque cette décomposition est unique, on dit que les sous-espaces F_1 et F_2 sont en *somme directe*. Plus généralement, on peut définir la notion de somme directe pour une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Définition 1.9. *Soit E un espace vectoriel. Si $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E, on dit qu'ils sont en* somme directe *si tout élément $v \in F_1 + \cdots + F_n$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = v_1 + \cdots + v_n$ avec $v_i \in F_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Lorsque tel est le cas, on note également $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ le sous-espace vectoriel $F_1 + \cdots + F_n$.*

Pour vérifier que des sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on peut utiliser le critère suivant.

Proposition 1.10. *Les sous-espaces $F_1 + \cdots + F_n$ sont en somme directe si et seulement si pour tout $(v_1, \ldots, v_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$, l'égalité $v_1 + \cdots + v_n = 0$ implique $v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0$.*

Démonstration. Le sens $\Rightarrow$ est immédiat, il s'agit juste d'appliquer la définition d'une somme directe à la décomposition de l'élément 0. Montrons que si l'égalité $v_1+\cdots+v_n = 0$ implique $v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0$ pour tout $(v_1, \dots, v_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$, alors les sous-espaces $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe. Il faut donc prouver que si $(v_1, \dots, v_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ et si $(w_1, \dots, w_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ vérifient

$$v_1 + \cdots + v_n = w_1 + \cdots + w_n, \tag{1}$$

alors $v_1 = w_1, \dots, v_n = w_n$. Pour cela, réécrivons l'égalité (1) sous la forme

$$(v_1 - w_1) + (v_2 - w_2) + \cdots + (v_n - w_n) = 0.$$

L'hypothèse implique alors $v_1 - w_1 = \cdots = v_n - w_n = 0$, c'est-à-dire $v_1 = w_1, \dots, v_n = w_n$. □

Le cas de deux sous-espaces vectoriels est particulier.

Proposition 1.11. *Soit E un K-espace vectoriels et soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = 0$.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que F_1 et F_2 sont en somme directe. Soit $v \in F_1 \cap F_2$. Alors $0 = v - v = 0 - 0$. Comme F_1 et F_2 sont en somme directe, une telle décomposition est unique, ainsi $v = 0$ et donc $F_1 \cap F_2 = 0$. Réciproquement supposons $F_1 \cap F_2 = 0$. Soit $(v_1, v_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $v_1 + v_2 = 0$. On a alors $v_1 = -v_2 \in F_2$, donc $v_1 \in F_1 \cap F_2$ et donc $v_1 = 0$. On en déduit $v_2 = 0$. Ainsi la proposition 1.10 implique que F_1 et F_2 sont en somme directe. □

Remarque 1.12. Attention, la proposition 1.11 ne se généralise pas verbatim au cas deux n sous-espaces vectoriels avec $n \geqslant 3$. Considérons par exemple le cas de $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathbb{R}(1,0)$, $F_2 = \mathbb{R}(0,1)$ et $F_3 = \mathbb{R}(1,1)$. On vérifie que $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_3 = F_1 \cap F_3 = 0$ (en particulier $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = 0$). Pourtant ces trois sous-espaces ne sont pas en somme directe puisque

$$(1,1) = 0 + 0 + (1,1) = (1,0) + (0,1) + 0.$$

1.4 Familles génératrices, familles libres, bases

Soit E un espace vectoriel.

Définition 1.13. *On dit que E est de* dimension finie *s'il existe une famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E telle que $E = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Une telle famille est appelée* famille génératrice *de E.*

Exemple 1.14. Si $E = K^n$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons e_i l'élément $(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)$.

Tout élément $(x_1, \dots, x_n)$ de E peut s'écrire

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

donc $K^n = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ ce qui montre que K^n est un espace vectoriel de dimension finie.

Dans l'exemple précédent, on a envie de dire que K^n est en fait de dimension n. Pour définir correctement la notion de dimension, il est nécessaire d'introduire les notions de familles libres et de bases.

Définition 1.15. *Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille finie d'éléments de E. On dit que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est* libre *si pour tout n-uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$, on a*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Autrement dit, la seule combinaison linéaire nulle des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ est la combinaison dont les coefficients sont nuls.

Exemple 1.16. Si $E = K^n$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. En effet, supposons que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$, alors

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 = (0, \dots, 0)$$

donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Définition 1.17. *Une* base *de E est une famille finie d'éléments de E qui est à la fois libre et génératrice.*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit $v \in E$. Comme la famille $\mathcal{B}$ est génératrice, il existe des scalaires $x_1, \dots, x_n$ tels que $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Comme de plus la famille $\mathcal{B}$ est libre, les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont uniquement déterminés par v. On les appelle les *coordonnées* de v dans la base $\mathcal{B}$. Nous avons donc démontré le résultat suivant.

Proposition 1.18. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $v \in E$, il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ tel que*

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

Exemple 1.19. Si $E = \mathbb{R}^n$, notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la famille des vecteurs élémentaires (voir exemple 1.14). Il s'agit d'une famille génératrice et libre, donc il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^n$. Si $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots x_n e_n$$

donc les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont les coordonnées du vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Pour cette raison, on lui donne le nom de *base canonique* de $\mathbb{R}^n$. Mais attention, il existe bien d'autres bases dans $\mathbb{R}^n$! (voir les feuilles d'exercices)

Exemple 1.20. Soit $n \geqslant 0$ et soit $K[X]$ l'ensemble des applications polynômes de K dans K, c'est-à-dire des applications de K dans K de la forme $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel du K-espace vectoriel $\mathcal{F}(K, K)$. Si $n \geqslant 0$, on note $K_n[X]$ le sous-espace des applications polynômes de degré inférieur ou égal à n. Si on note X^i l'application polynôme $x \mapsto x^i$, la famille $(1, X, X^2 \dots, X^n)$ est une base de $K_n[X]$.

Le corollaire suivant est une reformulation de la proposition 1.18

Corollaire 1.21. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \end{array}$$

est une bijection.

Le théorème qui va suivre est très utile pour construire des bases.

Théorème 1.22. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$ une famille libre de E et soit $\mathcal{B}_2 = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_s)$ une famille génératrice de E telle que $s \geqslant r$. Alors il existe un entier $0 \leqslant k \leqslant s - r$ et des entiers $i_1 < \cdots < i_k$ compris entre $r + 1$ et s tels que la famille $(e_1, \dots, e_r, e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ soit une base de E. En d'autres termes, d'une famille génératrice, on peut toujours extraire une base contenant une sous-famille libre donnée.*

Corollaire 1.23. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute famille génératrice contient une sous-famille qui est une base.*

Démonstration. On peut supposer $E \neq 0$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E. Comme cette famille est génératrice, elle contient au moins un élément non nul. Quitte à permuter les éléments de cette famille on peut supposer que $e_1 \neq 0$. La famille réduite à e_1 est alors libre. Le théorème 1.22 implique alors qu'il existe une sous-famille de $\mathcal{B}$ qui est une base de E. $\square$

Corollaire 1.24. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, on peut toujours compléter une famille libre en une base.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r)$ une famille libre de E. Comme E est de dimension finie, il possède une famille génératrice $(f_1, \dots, f_s)$. La famille $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s)$ est alors aussi une famille génératrice et on peut appliquer le théorème 1.22 pour prouver qu'il existe une sous-famille de $\mathcal{B}'$ qui est une base et qui complète $\mathcal{B}$. $\square$

Théorème 1.25. *Tout K-espace vectoriel E de dimension finie possède une base. De plus toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.*

Démonstration. L'existence d'une base est une conséquence immédiate du corollaire 1.23 puisqu'un espace vectoriel de dimension finie contient au moins une famille génératrice. La démonstration du fait que toutes les bases ont le même nombre d'éléments est plus délicate. Nous allons la décomposer en plusieurs étapes.

Lemme 1.26. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E. Soit $v \in E$ et supposons que $v \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$. Alors il existe $r + 1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $(e_1, \dots, e_{i-1}, v, e_{i+1}, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E.*

Démonstration. Comme la famille $\mathcal{B}$ est génératrice, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ tel que $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Comme $v \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$, il existe $r+1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $\lambda_i \neq 0$. On peut alors écrire

$$e_i = \lambda_i^{-1}(v - \lambda_1 e_1 - \cdots - \lambda_{i-1}e_{i-1} - \lambda_{i+1}e_{i+1} - \cdots - \lambda_n e_n).$$

Ainsi $e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, v, e_{i+1}, \dots, e_n)$. En conséquence $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, v, e_{i+1}, \dots, e_n)$ et donc la famille $(e_1, \dots, e_{i-1}, v, e_{i+1}, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E. $\square$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et soit $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_m)$ deux bases de E. Supposons par l'absurde que $m > n$. En appliquant le lemme 1.26, on construit une famille génératrice de E à n termes dont le premier terme est f_1 et les vecteurs suivants proviennent de $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}'$ est une base, la famille (f_1, f_2) est libre donc $f_2 \notin \mathrm{Vect}(f_1)$. Le lemme 1.26 permet alors de construire une famille génératrice à n termes dont les deux premiers termes sont f_1, f_2 et les suivants des vecteurs de $\mathcal{B}$. En itérant ce procédé, on obtient une famille génératrice à n termes constituée des vecteurs $(f_1, \dots, f_n)$. Mais alors $f_{n+1} \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$, ce qui contredit la liberté de la famille $\mathcal{B}'$. $\square$

Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie. La longueur d'une base de E est appelée *dimension* de E. On la note $\dim_K E$.

Exemple 1.27. L'exemple 1.19 montre que la famille des vecteurs élémentaires $e_1, \dots, e_n$ est une base de K^n, on en conclut que $\dim_K K^n = n$.

Exemple 1.28. Dans l'exemple 1.20, on a vu que la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base du K-espace vectoriel $K_n[X]$. On en conclut que $\dim_K K_n[X] = n + 1$.

Corollaire 1.29. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E, alors $n \leqslant \dim_K E$.*

Démonstration. D'après le corollaire 1.24, on peut compléter la famille $(e_1, \dots, e_n)$ en une base de E. Le théorème 1.25 implique alors que $\dim_K E \geqslant n$. $\square$

Corollaire 1.30. *Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille constituée de m vecteurs avec $m > n$ est liée.*

Démonstration. Il s'agit d'une reformulation du corollaire 1.29. $\square$

Corollaire 1.31. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $\dim_K F \leqslant \dim_K E$. De plus on a $\dim_K F = \dim_K E$ si et seulement si $F = E$.*

Corollaire 1.32. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.*

(i) Supposons $\mathcal{B}$ libre. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si $n = \dim_K E$.

(ii) Supposons $\mathcal{B}$ génératrice. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si $n = \dim_K E$.

1.5 Dimension et sommes directes

Proposition 1.33. *Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si F et G sont de dimension finie, alors $F+G$ et $F \cap G$ sont de dimension finie et on a*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim F - \dim F \cap G.$$

Proposition 1.34. *Soit $(F_1, \dots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Si ces sous-espaces sont en somme directe, alors pour toute base $\mathcal{B}_1$ de F_1, $\mathcal{B}_2$ de F_2,…,$\mathcal{B}_n$ de F_n, la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$,…,$\mathcal{B}_n$ est une famille libre de E. Si de plus $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = E$, alors $\mathcal{B}$ est une base de E.*

Proposition 1.35. *Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Ces sous-espaces sont en somme directe si et seulement si*

$$\dim(F_1 + \cdots + F_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i.$$

1.6 Applications linéaires

Définition 1.36. *Soient E et F deux espaces vectoriels. Une* application linéaire *de E dans F est une application f de E dans F telle que*

$$\forall (\lambda, x, y) \in K \times E \times E, \quad f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

Si E et F sont deux espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Lorsque $E = F$, on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$. Un élément de $\mathcal{L}(E)$ est appelé *endomorphisme* de E.

Exemple 1.37. 1. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, y+2x)$ est linéaire.

2. Plus généralement, étant donnés des nombres réels $a_1, \dots, a_n$, l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \dots, x_x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ est linéaire.

3. Encore plus généralement, une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ s'écrit sous la forme

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n).$$

Chaque f_i est une application de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et s'appelle la *i-ème application coordonnée de f*. On vérifie facilement que f est linéaire si et seulement si toutes ses applications coordonnées f_i sont linéaires.

1.7 Noyau, image et rang

Définition 1.38. *Si E et F sont deux espaces vectoriels et si f est une application linéaire de E dans F, on note* $\operatorname{Im} f$ *l'image $f(E)$ de f et* $\operatorname{Ker} f$ *le* noyau *de f, c'est-à-dire l'ensemble $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E,\ f(x) = 0\}$.*

On vérifiera à titre d'exercice que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E et que $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 1.39. *Si f est une application linéaire entre deux espaces vectoriels, alors f est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = 0$*.*

Démonstration. Si f est injective, alors $\operatorname{Ker} f$ est réduit à 0. Réciproquement supposons que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Si x et y sont deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$, alors $f(x) - f(y) = 0$. Par linéarité de f, on a alors $f(x-y) = 0$ et donc $x - y \in \operatorname{Ker} f$. Ainsi on doit avoir $x - y = 0$, c'est-à-dire $x = y$. On a prouvé que l'application f est injective. $\square$

La dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ est appelé le *rang* de f et est notée $\operatorname{rg} f$. Ainsi on a, par définition, $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$.

Théorème 1.40 (Théorème du rang)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un espace vectoriel. Si f est une application linéaire de E dans F, alors* $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de dimension finie de F et on a*

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f.$$

Démonstration. L'espace vectoriel E est de dimension finie. D'après le théorème 1.25, il possède au moins une base. Soit donc $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Nous allons montrer que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Tout d'abord, on a bien $f(e_i) \in \operatorname{Im} f$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Soit $w \in \operatorname{Im} f$. Par définition de $\operatorname{Im} f$, il existe $v \in E$ tel que $f(v) = w$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe des scalaires $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n v_n$. L'application f étant linéaire, on a

$$w = f(v) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n).$$

Ainsi w est combinaison linéaire des vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$. Ceci étant vrai pour tout choix de $w \in \operatorname{Im} f$, la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. On en conclut donc que $\operatorname{Im} f$ est un espace vectoriel de dimension finie.

D'après le corollaire 1.23, on peut extraire de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ une base de $\operatorname{Im} f$. Soit $r \coloneqq \dim_K \operatorname{Im} f$. Il existe donc des indices $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant n$ tels que $(f(e_{i_1}), \dots, f(e_{i_r}))$ est une base de $\operatorname{Im} f$. Comme r est le rang de f, il nous reste donc à démontrer que

$$n = \dim_K E = r + \dim_K \operatorname{Ker} f.$$

Soit $W := \mathrm{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $e_{i_1}, \dots, e_{i_r}$. Montrons que la famille $(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ est libre. Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^r$ tel que

$$\lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_r e_{i_r} = 0.$$

Alors, par linéarité de f, on a

$$\lambda_1 f(e_{i_1}) + \cdots + \lambda_r f(e_{i_r}) = f(\lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_r e_{i_r}) = f(0) = 0.$$

En utilisant le fait que $(f(e_{i_1}), \dots, f(e_{i_r}))$ est une famille libre de F, on en conclut que $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = (0, \dots, 0)$ et donc que $(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ est une famille libre de E. Comme par ailleurs, $(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ est, par définition de W, une famille génératrice de W, il s'agit en fait d'une base de W et donc $\dim_K W = r$.

Nous allons à présent montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus W$. Commençons par vérifier que $\operatorname{Ker} f$ et W sont en somme directe. Soit $v \in \operatorname{Ker} f \cap W$. D'une part $v \in W$, donc il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^r$ tel que $v = \lambda_1 e_{i_1} + \cdots \lambda_r e_{i_1}$. D'autre part, $v \in \operatorname{Ker} f$, donc $f(v) = 0$. Ceci nous donne

$$\lambda_1 f(e_{i_1}) + \cdots + \lambda_r f(e_{i_r}) = 0.$$

Comme $(f(e_{i_1}), \dots, f(e_{i_r}))$ est une famille libre, on en conclut que $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = (0, \dots, 0)$ et donc que $v = 0$. Ainsi, d'après la proposition 1.11, les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et W sont en somme directe. Il reste donc à prouver que $E = \operatorname{Ker} f + W$. Soit $v \in E$ un vecteur de E. Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^r$ tel que

$$f(v) = \lambda_1 f(e_{i_1}) + \cdots + \lambda_r f(e_{i_r}).$$

Posons alors $w := \lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_r e_{i_r}$. On a $w \in W$. De plus $f(v - w) = 0$, donc $v - w \in \operatorname{Ker} f$. On a donc bien décomposé $v = (v - w) + w$ prouvant que $E = \operatorname{Ker} f + W$.

On conclut donc de la proposition 1.35 que $\dim_K E = \dim_K \operatorname{Ker} f + \dim_K W$. □

Exemple 1.41. 1. Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x + y, 2x + y).$$

Déterminons son noyau. Un élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est dans le noyau de f si et seulement si il est solution du système d'équations linéaires homogène

$$\begin{cases} x + y & = 0 \\ 2x + y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y & = 0 \\ x & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0. \end{cases}$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f = 0$ et l'application f est injective. Le théorème du rang (théorème 1.40) nous donne alors $\operatorname{rg} f = 2$. Ainsi $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^2$, ce qui implique $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ d'après le corollaire 1.31. L'application f est donc surjective. Étant injective et surjective, elle est bijective.

2. Considérons à présent l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y + z, y + z).$$

Déterminons son noyau. Il faut résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ 2x + y + z & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z & = 0 \\ x & = 0 \\ y & = -z \end{cases}$$

Le noyau de f est donc le sous-espace vectoriel constitué des vecteurs de la forme $(0, y, -y)$, c'est-à-dire la droite vectoriel $\mathbb{R}(0, 1, -1)$. Ainsi $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. Le théorème du rang implique alors que $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Cette fois-ci, on a $\operatorname{Im} f \subsetneq \mathbb{R}^3$, l'application f n'est ni injective ni surjective.

1.8 Opérations sur les applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels. Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F, on note $f + g$ l'application de E dans F définie par

$$\forall x \in E,\ (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Il s'agit d'une application linéaire de E dans F. De même si $\lambda \in K$, on note $\lambda \cdot f$ l'application de E dans F définie par

$$\forall x \in E,\ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

Il s'agit encore d'une application linéaire de E dans F. Muni des opérations $+$ et $\cdot$ définies ci-dessus, l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.

Si E, F et G sont trois espaces vectoriels, et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, l'application composée $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Théorème 1.42. *Soient E et F deux espaces vectoriels. Supposons que E est de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors pour toute famille $(f_1, \ldots, f_n)$ de $n = \dim_K E$ éléments de F, il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $u(e_i) = f_i$. Si de plus la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre, l'application u est injective. Si de plus la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de F, l'application u est bijective.*

Démonstration. Soit $v \in E$ et soit $(x_1, \ldots, x_n)$ le système de coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$. On a donc $v = x_1 e_1 + \cdots x_n e_n$. On pose alors

$$u(v) \coloneqq x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n.$$

On obtient ainsi une application u de E dans F. On vérifie facilement qu'elle est linéaire. Elle vérifie également la propriété $u(e_i) = f_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Vérifions que c'est la seule application linéaire ayant cette propriété. Supposons en effet que u' soit une application linéaire de E dans F tel que $u'(e_i) = f_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Si $v \in E$ et si $(x_1, \ldots, x_n)$ est le système de coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$u'(v) = u'(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1u'(e_1) + \cdots + x_nu'(e_n) = x_1f_1 + \cdots + x_nf_n = u(v).$$

Comme $u'(v) = u(v)$ pour tout $v \in E$, on a bien $u' = u$. Ceci prouve l'unicité de u.

Le reste est laissé en exercice. □

1.9 Matrices

Définition 1.43. *Soient $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ deux entiers. Une* matrice *de taille $n \times p$ à coefficients dans K est un tableau rectangulaire A ayant n lignes et p colonnes contenant des éléments de A. On note $a_{i,j}$ ses coefficients et on les indexe de la façon suivante*

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & a_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes. C'est un K-espace vectoriel pour les opérations suivantes

— $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, alors $C = A + B$ où $C = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

— $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, $\lambda \in K$, alors $\lambda \cdot A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

Le K-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est de dimension finie. Une base de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est donnée par la famille de matrices $E_{i,j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$. La matrice $E_{i,j}$ est la matrice dont toutes les entrées sont nulles sauf l'entrée à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1. On en déduit que

$$\dim_K \mathcal{M}_{n,p}(K) = np.$$

Si $n = p$, une matrice de $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{M}_{n,p}(K)$ est appelée *matrice carrée* de taille n.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$, on définit le *produit* de A avec B par

$$AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$$

où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$.

Proposition 1.44. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(K)$, on a*

— *$A(BC) = (AB)C$;*

— $A(B+C) = (AB) + (AC)$;
— $(A+B)C = (AC) + (BC)$;
— *si* $\lambda \in K$, *on a* $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Pour $n \geqslant 1$, on identifie l'espaces vectoriel K^n à l'espace des matrices $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ via l'opération $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Si $n \geqslant 1$, on note I_n la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de $\mathcal{M}_n(K)$ définie par $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{i,j} = 1$ si $i = j$. On l'appelle la *matrice identité*.

Définition 1.45. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, on appelle* transposée de A *et on note ${}^tA$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ définie par*

$${}^tA = (a_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$$

On a alors ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

Définition 1.46. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite* inversible *s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $AB = BA = I_n$. Si elle existe, la matrice B est unique et est appelée* inverse de A. *On la note alors A^{-1}.*

On note $\mathrm{GL}_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$. Si A et B sont dans $\mathrm{GL}_n(K)$, alors $AB \in \mathrm{GL}_n(K)$ et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1.10 Représentation matricielle d'une application linéaire

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. On fixe $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Pour $1 \leqslant j \leqslant p$, on note $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$ les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$. Autrement dit

$$u(e_j) = a_{1,j}f_1 + \cdots + a_{n,j}f_n.$$

La matrice de taille $n \times p$ de termes $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est appelée *matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$*. On la note $\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(u)$ ou encore $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$. Si $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u) = \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E)}(u)$.

Soit $v \in E$. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est le système de coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}_E$, on note $X_{\mathcal{B}_E}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}_E$.

La matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ a alors la propriété suivante :

$$X_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)}(u) X_{\mathcal{B}_E}(v).$$

Proposition 1.47. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = p$ et $\dim F = n$. Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E et soit $\mathcal{B}_F$ une base de F. Alors l'application de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ définie par $u \mapsto \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)}(u)$ est linéaire et bijective.*

Proposition 1.48. *Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = q$, $\dim F = p$ et $\dim G = n$. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G. Alors si $u \in \mathcal{L}(F,G)$ et $v \in \mathcal{L}(E,F)$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G)}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G)}(u)\, \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)}(v).$$

1.11 Changements de base

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice carrée de taille n dont la j-ème colonne est donnée par les coordonnées du j-ème vecteur de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$, et que

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant n,\ e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i,$$

alors

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$$

Si $v \in E$, on a alors

$$X_{\mathcal{B}}(v) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}(v).$$

En effet, soit $(x_1, \dots, x_n)$ le système de coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$ et $(x'_1, \dots, x'_n)$ le système de coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j$.

Comme $e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$, on en conclut

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x'_j \right) e_i.$$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on a bien

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x'_j$$

c'est-à-dire $X_{\mathcal{B}}(v) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}(v)$.

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases de E, on a alors

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}.$$

De plus, $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = I_n$ de sorte que la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est toujours inversible et que

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}.$$

Proposition 1.49. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F)}(f) = P_{\mathcal{B}_F\to\mathcal{B}'_F}^{-1}\,\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)}(f)P_{\mathcal{B}_E\to\mathcal{B}_F}.$$

En particulier, si $E = F$, $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{B}'_E = \mathcal{B}'_F$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E}(f) = P_{\mathcal{B}_E\to\mathcal{B}'_E}^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)P_{\mathcal{B}_E\to\mathcal{B}'_E}.$$

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(K)$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Deux matrices sont semblables si et seulement si ce sont les matrices du même endomorphisme de K^n dans des bases différentes.

2 Déterminants

Notations : Si $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ sont deux entiers. Si $C_1, \ldots, C_n$ sont n vecteurs colonnes de K^p, on note $||C_1, \ldots, C_n||$ la matrice $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ dont les colonnes successives sont $C_1, \ldots, C_n$. Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et si i et j sont deux entiers compris entre 1 et n, on note $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue à partir de A en supprimant dans A la i-ème ligne et la j-ème colonne.

2.1 Déterminants d'ordre 2

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$, le *déterminant* de A est la quantité

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Cette quantité a la propriété suivante : la matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

2.2 Déterminants d'ordre supérieur

On définit par récurrence sur $n \geqslant 1$ une application

$$\det : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K$$

de la façon suivante :

— si $n = 1$, et $A = (a)$, on pose $\det A = a$;

— si $n > 1$ et si $\det : \mathcal{M}_{n-1}(K) \to K$ est bien définie, on définit, pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\ \leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(K)$,

$$\begin{aligned} \det A &\coloneqq a_{1,1} \det A_{1,1} - a_{2,1} \det A_{1,2} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{1,n} \det A_{1,n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{1,i} \det A_{1,i}. \end{aligned}$$

On a donc bien défini, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, un scalaire $\det A \in K$. On le note aussi

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Exemple 2.1. Si $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \\ &= a_{1,1} \det(A_{1,1}) - a_{1,2} \det(A_{1,2}) + a_{1,3} \det(A_{1,3}) \\ &= a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}. \end{aligned}$$

2.3 Opérations sur les colonnes d'un déterminant

Théorème 2.2. *1) L'application* det *est linéaire en chaque colonne. Plus précisément, étant donné $n \geqslant 1$, ainsi que $1 \leqslant j \leqslant n$ et $n-1$ vecteurs colonnes $C_1, \ldots, Cj - 1, C_{j+1}, \ldots, C_n$ de K^n. Alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & K \\ C & \longmapsto & \det||C_1, \ldots, C_{j-1}, \underbrace{C}_{j}, C_{j+1}, \ldots, C_n|| \end{array}$$

est linéaire, c'est-à-dire

$$\forall C, C' \in K^n,\ \forall \lambda \in K, \quad \det||C_1, \dots, C_{j-1}, C + \lambda C', C_{j+1}, \dots, C_n|| \\ = \det||C_1, \dots, C_{j-1}, C, C_{j+1}, \dots, C_n|| + \lambda \det||C_1, \dots, C_{j-1}, C', C_{j+1}, \dots, C_n||.$$

2) Si deux colonnes d'une matrice carrée A sont égales, alors $\det A = 0$.

3) Si on échange deux colonnes d'une matrice carrée, on multiplie son déterminant par -1.

Exemple 2.3.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Corollaire 2.4. *On ne change pas le déterminant d'une matrice carrée A en ajoutant à une de ses colonnes une combinaison linéaire des autres colonnes.*

2.4 Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et soit $\mathcal{B}$ une base de E.

Définition 2.5. *Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E. Le* déterminant *de la famille $(v_1, \dots, v_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est le scalaire*

$$\det{}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \det||X_{\mathcal{B}}(v_1), \dots, X_{\mathcal{B}}(v_n)||.$$

Autrement dit $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$ *est le déterminant de la matrice carrée de taille $n \times n$ dont la i-ième colonne est le vecteur colonne des coordonnées de v_i dans la base $\mathcal{B}$.*

Théorème 2.6. *1) L'application* $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to K$ *est linéaire en chaque variable. Autrement dit si $1 \leqslant i \leqslant n$ et si $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ sont $n-1$ vecteurs de E, alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ v & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n) \end{array}$$

est linéaire.

2) L'application $\det_{\mathcal{B}}$ *est alternée, autrement dit pour $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$, et pour $i < j$, on a*

$$\det{}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\det{}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

2.5 Indépendance linéaire et déterminant

Théorème 2.7. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs de E. Alors* $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ *si et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E.*

Corollaire 2.8. *Soit $n \geqslant 1$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. La matrice A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

2.6 Opérations sur les lignes

Théorème 2.9. *Soit* $n \geqslant 1$*.*

1) L'application $\det : \mathcal{M}_n(K)$ *est linéaire en chaque ligne.*

2) Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *ayant deux lignes égales vérifie* $\det A = 0$*.*

3) Si on échange deux lignes d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(K)$*, on multiplie son déterminant par* -1*.*

Corollaire 2.10. *Soit* $n \geqslant 1$ *et soit* $A \in \mathcal{M}_n(K)$*. Soit* B *la matrice obtenu à partir de* A *en ajoutant à une ligne de* A *une combinaison linéaire des autres lignes de* A*. Alors* $\det B = \det A$*.*

2.7 Développement d'un déterminant selon une ligne ou une colonne

Théorème 2.11. *Soit* $n \geqslant 1$ *et soit* $A \in \mathcal{M}_n(K)$*.*

1) Soit $1 \leqslant i \leqslant n$*. On a alors*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j};$$

on dit qu'on a développé $\det A$ *selon la* i*-ième ligne.*

2) Soit $1 \leqslant j \leqslant n$*. On a alors*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j};$$

on dit qu'on a développé $\det A$ *selon la* j*-ième colonne.*

Corollaire 2.12. *Soit* $n \geqslant 1$ *et soit* $A \in \mathcal{M}_n(K)$*. Alors*

$$\det {}^t A = \det A.$$

2.8 Formes multilinéaires alternées

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Une *forme n-linéaire* sur E est une application $f : E^n \to K$ telle que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, pour tout $n-1$-uplet $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) \in E^{n-1}$, l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ v & \longmapsto & f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n) \end{array}$$

est linéaire.

Une forme n-linéaire f sur E est dite *alternée* si pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et tout n-uplet $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$ de vecteurs de E, on a

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n).$$

Exemple 2.13. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, l'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée sur E.

Théorème 2.14. *Soit f une forme n-linéaire alternée sur E et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors il existe $\alpha \in K$ tel que $f = \alpha \det_{\mathcal{B}}$.*

Corollaire 2.15 (Formule du changement de base)**.** *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux base de E. Alors on a, pour tout $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$:*

$$\det{}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) = \det(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}) \det{}_{\mathcal{B}'}(v_1, \ldots, v_n).$$

Théorème 2.16 (Déterminant d'un produit de matrices)**.** *Soit $n \geqslant 1$ et soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$. On a alors*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Corollaire 2.17. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(K)$. On a alors*

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

Corollaire 2.18. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et soit $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ une matrice inversible. On a alors*

$$\det(PAP^{-1}) = \det(A).$$

2.9 Formule de Cramer

Définition 2.19. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. La* comatrice *de A est la matrice* $\mathrm{Com}(A)$ *de $\mathcal{M}_n(K)$ définie par*

$$\mathrm{Com}(A) = ((-1)^{i+j} \det(A_{i,j}))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$$

Théorème 2.20. *1) Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on a*

$$^t\,\mathrm{Com}(A)A = A^t\,\mathrm{Com}(A) = \det(A)I_n.$$

2) Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est inversible, on a

$$A^{-1} = (\det A)^{-1t}\,\mathrm{Com}(A).$$

Exemple 2.21. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$. Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2.10 Quelques déterminants classiques

Définition 2.22. *Soit* $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ *une matrice carrée. On dit qu'elle est* triangulaire supérieure *si* $a_{i,j} = 0$ *pour* $i > j$*. Elle est* triangulaire inférieure *si* $a_{i,j} = 0$ *pour* $i < j$*.*

Théorème 2.23. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *une matrice triangulaire supérieure ou inférieure. Alors*

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Corollaire 2.24. *Une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est inversible si et seulement si tous ses termes diagonaux sont non nuls.*

2.11 Un cas particulier de calcul de rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ et soit $r \leqslant \min(p, n)$. On appelle *mineur d'ordre* r de A un déterminant d'une sous-matrice carrée de A obtenue en sélectionnant r lignes et r colonnes de A.

Exemple 2.25. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ possède trois mineurs d'ordre 3. Il s'agit de

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3.$$

Théorème 2.26. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ *et soit* $r = \min(p, n)$*. Alors* A *est de rang* r *si et seulement si* A *possède au moins un mineur d'ordre* r *non nul.*

3 Réduction des endomorphismes, première partie

On fixe E un K-espace vectoriel.

3.1 Sous-espaces propres et valeurs propres

Définition 3.1. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme de* E*. Un* vecteur propre *de* f *est un vecteur* $v \in E$ *vérifiant les deux propriétés suivantes :*

- *v est non nul ;*
- *il existe $\lambda \in K$ tel que $f(v) = \lambda v$.*

Si v est un vecteur propre de f, le scalaire λ tel que $f(v) = \lambda v$ est appelé *valeur propre* de f correspondant à v. L'ensemble de toutes les valeurs propres de f est noté $\operatorname{Sp} f$, il s'agit du *spectre* de f.

Définition 3.2. *Si* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et si* λ *est une valeur propre de* f*, le sous-espace* $E_\lambda(f) :=$ $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ *est appelé* sous-espace propre *de* f *associé à* λ*.*

3.2 Analogues matriciels

Définition 3.3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(K)$*. Soit* u_A *l'unique endomorphisme de* K^n *dont la matrice dans la base canonique est* A*. Un* vecteur propre *de* A *est un élément de* K^n *qui est vecteur propre de* u_A*. De même une valeur propre de* A *est une valeur propre de* u_A*. Si* λ *est un valeur propre de* A*, on note* $E_\lambda(A)$ *le sous-espace* $E_\lambda(u_A)$ *de* K^n*.*

En d'autres termes, un vecteur propre de A est un vecteur $X \in K^n$ tel que $X \neq 0$ et tel qu'il existe $\lambda \in K$ vérifiant $AX = \lambda X$. Si λ est une valeur propre de A, on a aussi

$$E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n).$$

On pose $\operatorname{Sp} A$ l'ensemble des valeurs propres d'une matrice A.

3.3 Indépendance linéaire des vecteurs propres

Théorème 3.4. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme de* E*. Soit* $(v_1, \ldots, v_n)$ *une famille de vecteurs de* E*. On suppose que chaque* v_i *est un vecteur propre de* f *de valeur propre associée* λ_i*. Si l'on suppose que les valeurs* $\lambda, \ldots, \lambda_n$ *sont deux à deux distinctes, ce qui signifie* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *dès que* $i \neq j$*, alors la famille* $(v_1, \ldots, v_n)$ *est une famille libre.*

3.4 Endomorphismes diagonalisables

On suppose, dans cette partie, que E est un K-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 3.5. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme de* E*. On dit que l'endomorphisme* f *est* diagonalisable *s'il existe une base de* E *constituée de vecteurs propres de* f*.*

Soit $n \geqslant 1$ *et soit* $A \in \mathcal{M}_n(K)$*. On dit que la matrice* A *est* diagonalisable *si l'espace* K^n *possède une base constitué de vecteurs propres de* A*.*

Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et si f est l'endomorphisme de K^n dont la matrice dans la base canonique est A, alors A est diagonalisable si et seulement si f est diagonalisable.

Proposition 3.6. *1) Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme de* E*. Une base* $\mathcal{B}$ *de* E *est une base de vecteurs propres de* f *si et seulement si* $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ *est une matrice diagonale.*

2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme de* E*. L'endomorphisme* f *est diagonalisable si et seulement si il existe une base* $\mathcal{B}$ *de* E *telle que la matrice* $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ *est diagonale.*

3) Soit $n \geqslant 1$ *et soit* $A \in \mathcal{M}_n(K)$*. La matrice* A *est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice* $P \in \mathcal{M}_n(K)$ *inversible telle que* $P^{-1}AP$ *est une matrice diagonale.*

Proposition 3.7. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Soit $\mathcal{B}$ est une base de E. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si la matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ *est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_{\dim E}(K)$. De plus, on a* $\mathrm{Sp}\, f = \mathrm{Sp}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 3.8. *Soit $n \geqslant 1$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(K)$, on a*

$$\mathrm{Sp}(PAP^{-1}) = \mathrm{Sp}(A).$$

De plus, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on a une égalité de sous-espaces vectoriels de K^n

$$E_\lambda(PAP^{-1}) = PE_\lambda(A).$$

En particulier $\dim E_\lambda(PAP^{-1}) = \dim E_\lambda(A)$.

Proposition 3.9. *Soit $n \geqslant 1$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Si A est une matrice triangulaire supérieure*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

alors

$$\mathrm{Sp}\, A = \{a_{i,i},\ 1 \leqslant i \leqslant n\} = \{a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}\}.$$

3.5 Sous-espaces propres et critère de diagonalisabilité

Théorème 3.10. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme linéaire de E. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une famille de valeurs propres de f. On suppose que cette famille est constituée de valeurs deux à deux distinctes, c'est-à-dire $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$. Alors la famille de sous-espaces vectoriels $(E_{\lambda_i}(f))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est en somme directe. Autrement dit*

$$\sum_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(f) = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(f)$$
$$E_{\lambda_1}(f) + \cdots + E_{\lambda_n}(f) = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}(f).$$

Corollaire 3.11. *1) Supposons E de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Alors* $\mathrm{Sp}\, f$ *est fini et*

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, f} \dim E_\lambda(f) \leqslant \dim E.$$

2) Soit $n \geqslant 1$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors $\mathrm{Sp}\, A$ *est fini et*

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} \dim E_\lambda(A) \leqslant n.$$

Corollaire 3.12. *1) Supposons E de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Alors*
$$\operatorname{Card}\operatorname{Sp} f \leqslant \dim E.$$
2) Soit $n \geqslant 1$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors
$$\operatorname{Card}\operatorname{Sp} A \leqslant n.$$

Théorème 3.13. *1) Supposons E de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes*

(i) l'endomorphisme f est diagonalisable ;

(ii) on a $\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} E_\lambda(f) = E$;

(iii) on a $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \dim E_\lambda(f) = \dim E$.

2) Soit $n \geqslant 1$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes

(i) la matrice A est diagonalisable ;

(ii) on a $\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} E_\lambda(A) = K^n$;

(iii) on a $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim E_\lambda(A) = n$.

Corollaire 3.14. *1) Supposons E de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Si $\operatorname{Card}\operatorname{Sp} f = \dim E$, alors f est diagonalisable.*

2) Soit $n \geqslant 1$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Si $\operatorname{Card}\operatorname{Sp} A = n$, alors A est diagonalisable.

3.6 Le polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On note χ_A la fonction de K dans K définie par
$$\chi_A(x) \coloneqq \det(xI_n - A).$$

Théorème 3.15. *Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, la fonction χ_A est un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans K.*

Le polynôme χ_A est appelé *polynôme caractéristique* de A.

Théorème 3.16. *Soit $x \in K$. Alors x est une racine de χ_A si et seulement si x est une valeur propre de A. Autrement dit $\operatorname{Sp} A = \{x \in K \mid \chi_A(x) = 0\}$.*

Si $P \in \mathrm{GL}_n(K)$, $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $x \in K$, on a
$$\begin{aligned}\det(xI_n - P^{-1}AP) &= \det(P^{-1}(xI_n - A)P)\\ &= \det(P)^{-1}\det(xI_n - A)\det(P) = \det(xI_n - A),\end{aligned}$$
donc
$$\chi_{P^{-1}AP} = \chi_A. \tag{2}$$
Le polynôme caractéristique de deux matrices semblables est identique. La réciproque est fausse ! ! ! Deux matrices peuvent avoir le même polynôme caractéristique sans être semblables.

3.7 Passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$

Soit $n \geqslant 1$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ la matrice A peut également être vue comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Il faut prendre garde au fait que le caractère diagonalisable de A peut dépendre du fait que l'on considère A comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour bien marquer la différence, on dira que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou parfois juste *dans* $\mathbb{R}$) pour dire que A est diagonalisable comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dira alors que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ lorsque l'on voit A comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En d'autres termes, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A. Elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'il existe une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de A.

On note $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}} A$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} A$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes.

3.8 Une application aux systèmes d'équations différentielles linéaires

Soit K l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 3.17. *Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(K)$. On suppose que A est diagonalisable. Soit $\mathcal{B}$ une base de diagonalisation de A et soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Alors une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifie le système d'équation différentielles*

$$\begin{cases} x_1' &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots & \vdots \\ x_n' &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

si et seulement si il existe des constantes $c_1, \ldots, c_n$ de K telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

où

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

4 Polynômes et réduction des endomorphismes

4.1 Polynômes

Soit $n \geqslant 0$. On note X^n l'application de K^n dans K^n définie par $x \mapsto x^n$.

Définition 4.1. *Un* polynôme *à coefficients dans K est un élément du sous-espace des fonctions de K dans K engendré par la famille de fonctions $(X^n)_{n\geqslant 0}$. On note $K[X]$ le K-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans K.*

Explicitement, si P est un polynôme à coefficients dans K, il existe $n \geqslant 0$ ainsi que des éléments $a_0, \dots, a_n$ de K tels que

$$\forall x \in K,\ P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Si P est un polynôme à coefficients dans K, on peut écrire *de façon unique* $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ pour un entier n assez grand. Les éléments a_i de K ne dépendent que de P et sont appelés les *coefficients* de P.

Définition 4.2. *Si $P \in K[X]$. Le* degré *de P est l'élément de $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ défini par*

$$\deg P \coloneqq \max\{i \in \mathbb{N},\ a_i \neq 0\}.$$

On a donc $\deg P = -\infty$ si et seulement si $P = 0$. On vérifie de plus que si P et Q sont deux éléments de $K[X]$, on a $\deg PQ = \deg P + \deg Q$ (avec la convention $a - \infty = -\infty$ pour tout $a \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$). En particulier si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, on a $PQ \neq 0$.

Si $n \geqslant 0$, on note $K_n[X]$ l'ensemble des polynômes $P \in K[X]$ tels que $\deg P \leqslant n$. Il s'agit du sous-espace vectoriel de $K[X]$ engendré par la famille $(1, X, \dots, X^n)$. Il s'agit donc d'un espace vectoriel de dimension finie dont la dimension est égale à $n + 1$.

Remarque 4.3. Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$. On peut utiliser l'inclusion de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ pour identifier P à un élément de $\mathbb{C}[X]$. On peut ainsi voir $\mathbb{R}[X]$ comme une partie de $\mathbb{C}[X]$.

Définition 4.4. *Soit $P \in K[X]$ et soit $x \in K$. On dit que x est une* racine *de P si $P(x) = 0$.*

Théorème 4.5 (d'Alembert-Gauß)**.** *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Si $\deg P \geqslant 0$, alors il existe au moins une racine de P dans $\mathbb{C}$.*

Définition 4.6. *Soit $P \in K[X]$ et soit $Q \in K[X] \smallsetminus \{0\}$. On dit que Q* divise *P, et on note $Q \mid P$, s'il existe $R \in K[X]$ tel que $P = QR$.*

Remarque 4.7. Si Q divise P, le polynôme R tel que $P = QR$ est unique.

Proposition 4.8. *Soit $P \in K[X]$ et soit $a \in K$. Alors $P(a) = 0$ si et seulement si $X - a$ divise P.*

Si $Q \mid P$, et si $P \neq 0$, alors $\deg Q \leqslant \deg P$. En particulier, si $P \neq 0$ et si $(X-a)^m \mid P$, on a $m \leqslant \deg P$.

Définition 4.9. *Soit $P \in K[X] \setminus \{0\}$ et soit $a \in K$ une racine de P. On appelle* multiplicité de a dans P *l'entier*

$$m_a(P) \coloneqq \max\{m \in \mathbb{N},\, (X-a)^m \mid P\}.$$

On a toujours $m_a(P) \leqslant \deg P$.

Théorème 4.10. *Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Alors P a un nombre fini de racines. Notons* $\mathrm{Rac}(P)$ *l'ensemble de ces racines. On a alors*

$$P(X) = a_{\deg P} \prod_{a \in \mathrm{Rac}(P)} (X-a)^{m_a(P)}.$$

En particulier $\deg P = \sum_{a \in \mathrm{Rac}(P)} m_a(P)$.

4.2 Polynômes d'endomorphismes

Soit E un K-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $n \geqslant 1$, on note

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$$

et on pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$ un polynôme. On définit alors

$$P(f) \coloneqq \sum_{i=0}^n a_i f^i \in \mathcal{L}(E).$$

L'application de $K[X]$ vers $\mathcal{L}(E)$ définie par $P \mapsto P(f)$ est linéaire, ce qui signifie que, pour P et Q dans $K[X]$ et $\lambda \in K$, on a $(P + \lambda Q)(f) = P(f) + \lambda Q(f)$. On a également, pour P et Q dans $K[X]$,

$$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f).$$

De même, si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et si $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, on définit

$$P(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i.$$

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si $\mathcal{B}$ est une base de E, on a les relations

$$P(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, P(f).$$

On peut déduire de cette formule la relation suivante :

$$\forall P \in K[X], \forall A \in \mathcal{M}_n(K), \forall B \in \mathrm{GL}_n(K),\ P(BAB^{-1}) = BP(A)B^{-1}.$$

4.3 Un critère de diagonalisabilité

Théorème 4.11. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice carré de taille n. Alors A est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme $P(X) \in K[X]$* simplement scindé *tel que $P(A) = 0$.*

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 4.12. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme $P \in K[X] \setminus \{0\}$* simplement scindé *tel que $P(f) = 0$.*

4.4 Multiplicité d'une valeur propre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Si α est une racine de χ_A, on note $m_\alpha(\chi_A)$ la *multiplicité* de α dans χ_A.

Théorème 4.13. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit λ une valeur propre de A. Alors* $\dim_{\mathbb{C}} E_\lambda(A) \leqslant m_\lambda(A)$.

Pour démontrer ce théorème, on a utilisé les règles suivantes concernant le calcul d'un déterminant par blocs.

Proposition 4.14. *Soient $1 \leqslant r \neq n$ des entiers et soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix}$$

avec $M_1 \in \mathcal{M}_r(K)$, $M_2 \in \mathcal{M}_{r,n-r}(K)$ et $M_3 \in \mathcal{M}_{n-r}(K)$. Alors

$$\det(M) = \det(M_1)\det(M_3) \text{ et } \chi_M(X) = \chi_{M_1}(X)\chi_{M_3}(X).$$

Théorème 4.15. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors A est diagonalisable si et seulement si*

$$\forall \lambda \in \operatorname{Sp} A, \quad \dim_{\mathbb{C}} E_\lambda(A) = m_\lambda(A).$$

Théorème 4.16. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est diagonalisable si et seulement si $\chi_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et*

$$\forall \lambda \in \operatorname{Sp} A, \quad \dim_{\mathbb{R}} E_\lambda(A) = m_\lambda(A).$$

4.5 Trigonalisation

Définition 4.17. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est* trigonalisable *dans $\mathcal{M}_n(K)$ s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire supérieure.*

Théorème 4.18. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(K)$ si et seulement si son polynôme caractéristique χ_A est scindé dans $K[X]$.*

Corollaire 4.19. *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

4.6 La trace et le déterminant

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(K)$. La *trace* de A est le scalaire

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(K)$, on a $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$. En particulier si $P \in \mathrm{GL}_n(K)$, alors

$$\operatorname{Tr}(PAP^{-1}) = \operatorname{Tr}(A).$$

Théorème 4.20. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On a alors*

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} m_\lambda(A)\lambda, \quad \det(A) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \lambda^{m_\lambda(A)}.$$

4.7 Une application

Théorème 4.21. *Soit $d \geqslant 1$ et soit $P = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme* simplement scindé*. Alors l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, d fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle*

$$f^{(d)} + \sum_{i=0}^{d-1} a_i f^{(i)} = 0,$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension d dont une base est donnée par $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Rac}(P)}$ où e_λ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $e_\lambda(t) = e^{\lambda t}$.

4.8 Le théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 4.22. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors $\chi_A(A) = 0$.*

5 Espaces euclidiens

5.1 Définitions

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une *forme bilinéaire* sur E est une application $b : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & b(x,y) \end{array}$ vérifiant les conditions suivantes

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad b(x+\lambda y, z) = b(x,z) + \lambda b(y,z), \quad b(x, y+\lambda z) = b(x,y) + \lambda b(x,z).$$

Une forme bilinéaire est dite

— *symétrique* si $\forall (x,y) \in E^2$, $b(y,x) = b(x,y)$;
— *positive* si $\forall x \in E$, $b(x,x) \geqslant 0$;
— *définie* si $b(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Un *produit scalaire* est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.

Si $E = \mathbb{R}^n$, le *produit scalaire canonique* sur E est la forme

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = {}^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} (x_1, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Si $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E, la *norme euclidienne* d'un élément $x \in E$ pour ce produit scalaire est définie par $||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Elle vérifie les propriétés suivantes
— $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
— pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$.

Définition 5.1. *Un* espace euclidien *est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.*

5.2 Orthogonalité

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$. On dit que deux vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$.

Proposition 5.2. *Soient x et y deux vecteurs de E. Si $\langle x, y \rangle = 0$, on a $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$. Plus généralement, on a*

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x, y \rangle.$$

Définition 5.3. *Une famille $(v_i)_{i \geqslant 0}$ de vecteurs de E est dite* orthogonale *si, pour $i \neq j$, on a $\langle x, y \rangle = 0$. Une famille* orthonormale *de E est une famille orthogonale $(v_i)_{i \geqslant 0}$ telle que de plus $||v_i|| = 1$ pour tout $i \geqslant 0$.*

Théorème 5.4. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une famille orhonormale $(w_1, \ldots, w_n)$ de E telle que*

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_i) = \mathrm{Vect}(w_1, \ldots, w_n).$$

Corollaire 5.5. *Un espace euclidien possède toujours au moins une base orthonormale.*

Soit E un espace euclidien et soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base orthonormale de E. Si $x \in E$, on a

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle v_i.$$

Autrement dit le réel $\langle x, v_i \rangle$ est la i-ème coordonnée de x dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$.

5.3 Orthogonal d'un sous-espace

Soit E un espace euclidien.

Définition 5.6. *Soit F un sous-espace vectoriel de E, l'orthogonal de F est l'ensemble*

$$F^{\perp} = \{x \in F, \quad \forall y \in F, \langle x, y\rangle = 0\}.$$

L'ensemble $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 5.7. *Le sous-espace vectoriel $F^{\perp}$ est un supplémentaire de F, c'est-à-dire*

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

En particulier, on a $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$.

Corollaire 5.8. *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors $(F^{\perp})^{\perp} = F$.*

5.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$.

Théorème 5.9. *Soient x et y deux vecteurs de E. Alors on a*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant ||x||||y||.$$

De plus on a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Corollaire 5.10. *Soient x et y deux vecteurs de E. Alors on a*

$$||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||.$$

Définition 5.11. *Soient x et y deux vecteurs non nuls de E. On définit l'*angle *entre les vecteurs x et y comme l'unique élément $\theta \in [0, \pi]$ tel que*

$$\langle x, y\rangle = ||x||||y|| \cos\theta.$$

5.5 Projections orthogonales

Soit E un espace euclidien et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. La *projection orthogonale* de E sur F est la projection p_F de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$. Autrement dit si $x \in E$, le vecteur $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel qu $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

En particulier, si $x \in F$, on a le vecteur $x - p_F(x)$ est orthogonal à $p_F(x)$ et on a donc

$$||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + ||x - p_F(x)||^2.$$

Définition 5.12. *Si $x \in E$, on définit la* distance de x à F *comme étant*

$$d(x, F) := \inf_{y \in F} ||x - y||.$$

Théorème 5.13. *Soit $x \in E$. Alors $p_F(x)$ est l'unique élément de F tel que*

$$||x - p_F(x)||^2 = d(x, F).$$

Corollaire 5.14. *On a $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.*

Proposition 5.15. *Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base orthonormale de F. On a alors, pour tout $x \in E$,*

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

5.6 Isométries

Soit E un espace euclidien.

Définition 5.16. *Une* isométrie *de E est un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ préservant le produit scalaire de E, c'est-à-dire*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Des exemples d'isométries sont donnés par les *symétries orthogonales*. Si $F \subset E$, la symétrie orthogonale d'axe F est l'endomorphisme s_F de E défini par

$$s_F(x) = p_F(x) - (x - p_F(x)).$$

Il s'agit de l'unique endomorphisme f de E tel que $E_1(f) = F$ et $E_{-1}(f) = F^{\perp}$.

5.7 Adjoint

Soit E un espace euclidien.

Proposition 5.17. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, on a*

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

L'endomorphisme f^* est appelé *adjoint* de f. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E, l'adjoint f^* de f est donné par la formule

$$\forall x \in E, \quad f^*(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, f(e_i) \rangle e_i.$$

Proposition 5.18. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est une isométrie de E si et seulement si f est inversible et $f^* = f^{-1}$.*

Définition 5.19. *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit* autoadjoint *si $f^* = f$.*

Proposition 5.20. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Soient v_1 et v_2 deux vecteurs propres de f pour des valeurs propres distinctes, alors v_1 et v_2 sont orthogonaux, c'est-à-dire $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.*

Proposition 5.21. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Alors, pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

Corollaire 5.22. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Alors f est autoadjoint si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique, c'est-à-dire ${}^t\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. De plus f est une isométrie si et seulement si ${}^t\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = I_{\dim E}$.*

5.8 Diagonalisation des endomorphismes autoadjoints

Soit E un espace euclidien. Si $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice $(\overline{m_{i,j}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

Lemme 5.23. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que ${}^t\overline{M} = M$. Alors les valeurs propres de M sont des nombres réels.*

Lemme 5.24. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par f. Alors le sous-espace $F^\perp$ est stable par f^*.*

Théorème 5.25. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors f est diagonalisable en base orthonormale, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.*

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si elle vérifie l'égalité ${}^tMM = I_n$. Une matrice est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base orthonormale de l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Corollaire 5.26. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tM = M$. Alors il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale O telles que*

$$M = ODO^{-1} = OD^tO.$$

5.9 Les groupes orthogonaux

On note

$$O_n(\mathbb{R}) \coloneqq \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad {}^tMM = I_n\}.$$

On l'appelle le *groupe orthogonal*. On appelle *groupe spécial orthogonal* l'ensemble

$$SO_n(\mathbb{R}) \coloneqq \{M \in O_n(\mathbb{R}), \quad \det M = 1\}.$$

Proposition 5.27. *Soit M une matrice orthogonale. Alors*

(i) On a $\det M \in \{-1, 1\}$.

(ii) On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} M \subset \{-1, 1\}$.

Si $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $R(\theta) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est un élément de $SO_2(\mathbb{R})$ appelé *matrice de rotation*.

Proposition 5.28. *Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$ telle que* $\det M$. *Alors M est la matrice, dans la base canonique, d'une symétrie orthogonale dont l'axe est de dimension* 1.