Examen partiel de Théorie des nombres
Vendredi 21 janvier 2022. Durée : 3 heures.
Documents autorisés, appareils électroniques interdits.
La qualité de l'argumentation et la précision des arguments seront pris en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 Soit F un corps de nombres. On note $\psi_{\mathbb{Q}}$ l'unique caractère unitaire de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ tel que $\psi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = 1$, dont la composante archimédienne est le caractère $x \mapsto e^{-2\pi i x}$ et tel que $\psi_{\mathbb{Q},p}(\mathbb{Z}_p) = 1$ pour tout nombre premier. On note $\psi = \psi_{\mathbb{Q}} \circ \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}$, c'est un caractère de $\mathbb{A}_F$. Pour toute place v de F on note ψ_v la composante de ψ en v et dx_v la mesure autoduale de F_v relativement à ψ_v.

1. Calculer $\psi_{\mathbb{Q},p}(p^{-1})$ pour tout nombre premier p et montrer que pour toute place v de F au-dessus de p, le conducteur de ψ_v est l'inverse de la différente de F_v sur $\mathbb{Q}_p$.

Si ω est un caractère unitaire de $F_v^\times$, on pose

$$W_v(\omega) := \varepsilon(\psi_v, \omega|\cdot|_v^{\frac{1}{2}}).$$

2. Soit v une place de F et soit ω un caractère unitaire de $F_v^\times$. En utilisant l'équation fonctionnelle locale, montrer que $W_v(\omega)W_v(\omega^{-1}) = \omega(-1)$. En conclure que $|W_v(\omega)| = 1$.
3. Soit v une place ultramétrique de F et π_v une uniformisante de F_v. Soit ω un caractère unitaire et non ramifié de $F_v^\times$. Si $f = \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{F_v}}$, calculer $Z(f, \omega|\cdot|^{\frac{1}{2}})$ et $Z(\hat{f}, \omega|\cdot|^{\frac{1}{2}})$. En déduire que $W_v(\omega) = \omega(\pi_v)^{d_v}$ où $(\pi_v^{d_v})$ est le conducteur de ψ_v.

On fixe χ un caractère de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ d'ordre exactement 2. On suppose que, pour toute place archimédienne v de F, le caractère χ_v est trivial et que, pour toute place finie v de F, le caractère local χ_v est non ramifié. Si $\mathfrak{a}$ désigne un idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_F$, on note

$$\chi(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{p}} \chi(\pi_{\mathfrak{p}})^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})}$$

où $\pi_{\mathfrak{p}}$ est une uniformisante du complété $F_{\mathfrak{p}}$. On pose $W(\chi) = \prod_v W_v(\chi_v)$.

4. Justifier la définition de $W(\chi)$ et montrer que $W_v(\chi_v) = 1$ si v est archimédienne (on pourra utiliser sans démonstration qu'il existe une fonction de Schwartz positive et non nulle sur F_v telle que $\hat{f} = f$).
5. Montrer que $W(\chi) \in \{1, -1\}$.
6. On note $\mathcal{D}_{F/\mathbb{Q}}$ la différente de l'extension $F/\mathbb{Q}$. Montrer que $W(\chi) = \chi(\mathcal{D}_{F/\mathbb{Q}})^{-1}$.

7. Montrer qu'il existe une unique extension quadratique E/F telle que $F^\times N_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times) = \operatorname{Ker}\chi$. Montrer que l'extension E/F est non ramifiée et que $E_w = F_v$ pour toute place w de E dominant une place archimédienne v de F.
8. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_F$. Montrer que
$$\prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}}(1 - N\mathfrak{q}^{-s}) = (1 - N\mathfrak{p}^{-s})(1 - \chi_\mathfrak{p}(\pi_\mathfrak{p})N\mathfrak{p}^{-s}),$$
le produit portant sur les idéaux maximaux de $\mathcal{O}_E$ divisant $\mathfrak{p}$ (on rappelle que si K est un corps de nombres et $\mathfrak{a}$ un idéal maximal de $\mathcal{O}_K$, on note $N\mathfrak{a}$ le cardinal de $\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}$). En déduire que, pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} s > 1$, on a l'égalité
$$\zeta_E(s) = \zeta_F(s)L(\chi, s).$$
9. En déduire que $\varepsilon(\chi, s) = (|\Delta_E||\Delta_F|^{-1})^{s-\frac{1}{2}}$ puis que $W(\chi) = 1$.
10. Montrer que la classe de la différente $\mathcal{D}_{F/\mathbb{Q}}$ dans le groupe des classes d'idéaux de $\mathcal{O}_F$ est toujours un carré.

Corrigé :

1. Soit x l'adèle $(p^{-1}, \dots, p^{-1}, \dots)$. Comme $p^{-1} \in \mathbb{Z}_\ell$ si $\ell \neq p$, on a $\psi_{\mathbb{Q},\ell}(p^{-1}) = 1$ pour $\ell \neq p$ et donc
$$\psi_\mathbb{Q}(x) = 1 = \psi_{\mathbb{Q},\infty}(p^{-1})\psi_{\mathbb{Q},p}(p^{-1}) = e^{-2\pi i/p}\psi_{\mathbb{Q},p}(p^{-1})$$
de sorte que $\psi_{\mathbb{Q},p}(p^{-1}) = e^{2\pi i/p}$. Comme $\mathbb{Z}_p$ est dans le noyau de $\psi_{\mathbb{Q},p}$ et que p^{-1} n'y appartient pas, le conducteur de $\psi_{\mathbb{Q},p}$ est donc $\mathbb{Z}_p$. Si $v \mid p$, on a $\psi_v = \psi_{\mathbb{Q},p} \circ \operatorname{Tr}_{F_v/\mathbb{Q}_p}$. Alors le conducteur de ψ_v est le plus grand idéal fractionnaire I de F_v tel que $\operatorname{Tr}_{F_v/\mathbb{Q}_p}(I) \subset \mathbb{Z}_p$. C'est par définition l'inverse de la différente de F_v sur $\mathbb{Q}_p$.
2. L'équation fonctionnelle locale nous donne, pour tout $f \in \mathcal{S}(F_v)$,
$$\frac{Z(f, \omega|\cdot|_v^{\frac{1}{2}})}{L(\omega|\cdot|_v^{\frac{1}{2}})} = W_v(\omega)\frac{Z(\hat{f}, \omega^{-1}|\cdot|_v^{\frac{1}{2}})}{L(\omega^{-1}|\cdot|_v^{\frac{1}{2}})} = W_v(\omega)W_v(\omega^{-1})\frac{Z(\hat{\hat{f}}, \omega|\cdot|_v^{\frac{1}{2}})}{L(\omega|\cdot|_v^{\frac{1}{2}})}.$$
Comme $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$, on a
$$Z(\hat{\hat{f}}, \omega|\cdot|^{\frac{1}{2}}) = \int_{F_v} f(-x)\omega(x)|x|^{\frac{1}{2}}\, dx = \omega(-1)Z(f, \omega|\cdot|^{\frac{1}{2}}).$$
Ainsi $W_v(\omega)W_v(\omega^{-1}) = \omega(-1)$. Comme ω est unitaire, on a $\omega^{-1} = \overline{\omega}$ et donc $W_v(\omega^{-1}) = W_v(\overline{\omega})$. Par ailleurs, pour tout caractère ω de $F_v^\times$, on a
$$\overline{Z(f, \omega)} = Z(\overline{f}, \overline{\omega}).$$

Par ailleurs

$$\overline{Z(\hat{f},\omega)} = Z(\overline{\hat{f}},\overline{\omega}).$$

Comme $\overline{\hat{f}}(x) = \hat{\overline{f}}(-x)$, on en déduit

$$\overline{Z(\hat{f},\omega)} = \omega(-1)Z(\hat{\overline{f}},\overline{\omega}).$$

Comme de plus $\overline{L(\omega)} = L(\overline{\omega})$. En effet, dans le cas ultramétrique non ramifié, cela provient de la formule $L(\omega) = (1-\omega(\pi_v))^{-1}$, dans le cas ultramétrique ramifié, on a $L(\omega) = 1$ et dans le cas archimédien c'est une conséquence de l'égalité $\Gamma(\overline{s}) = \overline{\Gamma(s)}$. On en déduit que $W_v(\overline{\omega}) = \omega(-1)\overline{W_v(\omega)}$ et donc $W_v(\omega^{-1}) = \omega(-1)\overline{W_v(\omega)}$. Finalement que $|W_v(\omega)| = 1$.

3. On montre, comme dans le cours, que

$$\hat{f} = |\pi_v|_v^{-\frac{d_v}{2}} \mathbb{1}_{\pi_v^{d_v}\mathcal{O}_{F_v}}.$$

On a donc

$$Z(f,\omega) = \int_{\mathcal{O}_{F_v}} \omega(x)\,dx = \sum_{n\geqslant 0}\int_{\pi_{F_v}^n\mathcal{O}_{F_v}^\times} \omega(\pi_v)^n \operatorname{Vol}(\mathcal{O}_{F_v}^\times) = \frac{\operatorname{Vol}(\mathcal{O}_{F_v}^\times)}{1-\omega(\pi_v)}.$$

Et

$$Z(\hat{f},\widetilde{\omega}) = |\pi_v|^{-\frac{d_v}{2}} \int_{\pi_v^{d_v}\mathcal{O}_{F_v}} \widetilde{\omega}\,dx = |\pi_v|^{-\frac{d_v}{2}} \operatorname{Vol}(\mathcal{O}_{F_v}^\times) \sum_{n\geqslant d_v} \widetilde{\omega}(\pi_v)^n = |\pi_v|_v^{-\frac{d_v}{2}} \frac{\operatorname{Vol}(\mathcal{O}_{F_v}^\times)\widetilde{\omega}(\pi_v)^{d_v}}{1-\widetilde{\omega(\pi_v)}}.$$

On en déduit

$$W_v(\omega) = \frac{\operatorname{Vol}(\mathcal{O}_{F_v}^\times)}{\operatorname{Vol}(\mathcal{O}_{F_v}^\times)|\pi_v|^{-\frac{d_v}{2}}\omega^{-1}(\pi_v)^{d_v}|\pi_v|_v^{\frac{d_v}{2}}} = \omega(\pi_v)^{d_v}.$$

4. D'après le cours, on sait que le conducteur de ψ_v est $\mathcal{O}_{F_v}$ pour presque toute place v. La question précédente montre donc que $W_v(\chi_v) = 1$ pour presque toute place v. Ainsi $W(\chi)$ est bien défini. Soit v une place archimédienne. Par hypothèse, on a $\chi_v = 1$. Soit f une fonction de Schwartz sur F_v telle que $f = \hat{f}$ et $Z(f,1) \neq 0$. On a alors

$$Z(f,|\cdot|_v^{\frac{1}{2}})/L(|\cdot|_v^{\frac{1}{2}}) = W_v(\chi_v)Z(f,|\cdot|_v^{\frac{1}{2}})/L(|\cdot|_v^{\frac{1}{2}})$$

ce qui donne $W_v(\chi_v) = 1$ (omme $f \geqslant 0$ et non nulle on a $Z(f,|\cdot|_v) > 0$).

5. Comme χ est d'ordre 2, on a donc $\chi = \chi^{-1}$. Il en est donc de même pour tout χ_v. Ainsi $W(\chi_v)^2 = |W(\chi_v)|^2 = 1$ et donc $W(\chi)^2 = 1$.

6. Posons $\mathcal{D}_{F/\mathbb{Q}} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{a_{\mathfrak{p}}}$ la décomposition de la différente en produit d'idéaux premiers. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_F$ et p est le nombre premier de $\mathbb{Q}$ au-dessous de $\mathfrak{p}$, la différente de $F_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p$ est l'idéal $(\mathfrak{p}\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}})^{a_{\mathfrak{p}}}$. On en déduit que le conducteur du caractère $\psi_{\mathfrak{p}}$ est $(\pi_{\mathfrak{p}}^{-a_{\mathfrak{p}}})$ et donc que $W_{\mathfrak{p}}(\chi_{\mathfrak{p}}) = \chi_{\mathfrak{p}}(\pi_{\mathfrak{p}})^{-a_{\mathfrak{p}}}$. Comme $W_v(\chi_v) = 1$ si v est archimédienne, on en déduit

$$W(\chi) = \prod_{\mathfrak{p}} \chi_{\mathfrak{p}}(\pi_{\mathfrak{p}})^{-a_{\mathfrak{p}}} = \chi(\mathcal{D}_{F/\mathbb{Q}})^{-1}.$$

7. Comme χ est un caractère de Hecke, il est continu et son noyau est un sous-groupe fermé contenant $F^\times$. C'est un sous-groupe fermé d'indice $\leqslant 2$, donc ouvert. Le théorème d'existence montre qu'il existe une extension finie E/F telle que $F^\times N_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times) = \operatorname{Ker}\chi$. Comme le caractère χ_v est non ramifié en toute finie v, on a $\mathcal{O}_{F_v}^\times \subset \operatorname{Ker}\chi_v$ et donc $\mathcal{O}_{F_v}^\times \subset F^\times N_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$. On en déduit que si w est une place de E divisant v, le noyau de l'application de réciprocité locale $F_v^\times \to \operatorname{Gal}(E_w/F_v)$ contient $\mathcal{O}_{F_v}^\times$ et correspond donc aux groupe des normes d'une extension non ramifiée de F_v. Ainsi E_w/F_v est non ramifiée. Si v est une place archimédienne et w une place de E au-dessus de v, puisque χ_v est trivial, on a $F_v^\times \subset F^\times N_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$. Ceci prouve que l'application de réciprocité locale $F_v \to \operatorname{Gal}(E_w/F_v)$ est triviale et donc que $E_w = F_v$.
8. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_F$. Comme $\mathfrak{p}$ est non ramifié dans E. Il y a deux possibilités. Soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ où $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{q}_2$ sont deux idéaux maximaux distincts de $\mathcal{O}_E$. On a alors $N_{E/F}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}$ pour $i = 1, 2$. Ainsi $N\mathfrak{q}_i = N\mathfrak{p}$ et

$$(1 - N\mathfrak{q}_1^{-s})(1 - N\mathfrak{q}_2^{-s}) = (1 - N\mathfrak{p}^{-s})^2.$$

Ce cas équivaut à $\operatorname{Frob}_{E/F}(\mathfrak{p}) = 1$ et donc à $\pi_{\in} \operatorname{Ker}(\chi)$, ainsi $\chi_{\mathfrak{p}}(\pi_{\mathfrak{p}}) = 1$ et on a la formule souhaitée.

Dans le cas contraire, $\mathfrak{p}$ est inerte dans E et on a $N_{E/F}(\mathfrak{p}\mathcal{O}_E) = \mathfrak{p}^2$ de sorte que $N(\mathfrak{p}\mathcal{O}_E) = N\mathfrak{p}^2$. Par ailleurs $\operatorname{Frob}_{E/F}(\mathfrak{p}) \neq 1$ dans $\operatorname{Gal}(E/F)$ de sorte que $\pi_{\mathfrak{p}} \notin \operatorname{Ker}\chi$ et $\chi_{\mathfrak{p}}(\pi_{\mathfrak{p}}) = -1$. On a encore

$$(1 - N(\mathfrak{p}\mathcal{O}_E)^{-s}) = (1 - N\mathfrak{p}^{-2s}) = (1 - N\mathfrak{p}^{-s})(1 + N\mathfrak{p}^{-s}).$$

Pour $\operatorname{Re} s > 1$, on a donc

$$\zeta_E(s) = \prod_{\mathfrak{q}} \frac{1}{1 - N\mathfrak{q}^{-s}} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - N\mathfrak{p}^{-s}} \frac{1}{1 - \chi_{\mathfrak{p}}(\pi_{\mathfrak{p}}) N\mathfrak{p}^{-s}} = \zeta_F(s) L(\chi, s).$$

9. L'équation fonctionnelle globale de la fonction zeta est donnée par

$$\Lambda_F(1 - s) = |\Delta_F|^{s - \frac{1}{2}} \Lambda_F(s).$$

De même $\Lambda(\chi^{-1}, 1-s) = \varepsilon(\chi|\cdot|^s)\Lambda(\chi, s)$. Comme les facteurs locaux arhimédiens de ζ_F et $\Lambda(\chi, -)$ sont identiques et que E/F est non ramifiée à l'infini, on en déduit l'égalité

$$\varepsilon(\chi|\cdot|^s) = (|\Delta_E||\Delta_F|^{-1})^{s-\frac{1}{2}}.$$

En évaluant ceci en $s = 1/2$, on trouve $W(\chi) = 1$.

10. Le groupe des idéaux de $\mathcal{O}_F$ est isomorphe au quotient $\mathbb{A}_F^\times/F^\times V_0$ où V_0 est le sous-groupe $\prod_{v|\infty} F_v^\times \prod_{v\nmid\infty} \mathcal{O}_{F_v}^\times$. Les caractères quadratiques de ce groupe sont exactement les caractères de Hecke qui sont non ramifiés en toute place finie et triviaux aux places archimédiennes. Or on a montré que $W(\chi) = 1$ pour tout tel caractère et que $W(\chi) = \chi(\mathcal{D}_{F/\mathbb{Q}})$. Ainsi la classe de la différente est annulé par tout caractère quadratique du groupe des classes de $\mathcal{O}_F$. Le théorème de structure des groupes abéliens finis implique donc que la classe de la différente est un carré.

Exercice 2 Soit p un nombre premier. Soit $n \geqslant 1$ un entier et soit $K = \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ où $\zeta_{p^n} = e^{\frac{2\pi i}{p^n}}$.

1. Montrer que pour tout $i \geqslant 1$ premier à p, on a une égalité d'idéaux de $\mathcal{O}_K$: $(\zeta_{p^n}^i - 1) = (\zeta_{p^n} - 1)$.
2. En déduire que l'extension $K/\mathbb{Q}$ est totalement ramifiée en p, de degré $p^{n-1}(p-1)$ et que $(\zeta_{p^n} - 1)$ en est une uniformisante en p.
3. Si $a \in \mathbb{Z}$ est premier avec p, on note σ_a l'unique élément de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tel que $\sigma_a(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^a$. Montrer que l'application $a \mapsto \sigma_a$ induit un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ sur $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.
4. On note K_p le complété de K en l'unique place divisant p. Montrer que l'application de restriction de K_p à $\mathbb{Q}_p$ induit un isomorphisme de groupes
$$\mathrm{Gal}(K_p/\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}).$$
5. Si ℓ est un nombre premier différent de p, montrer que $\mathrm{Frob}_{K/\mathbb{Q}}(\ell) = \sigma_\ell$ (on pourra admettre que $K/\mathbb{Q}$ est non ramifié hors de p).
6. On note $r_{K_p/\mathbb{Q}_p}$ l'isomorphisme de réciprocité local de $K_p/\mathbb{Q}_p$. En utilisant la loi de réciprocité d'Artin, montrer que $r_{K_p/\mathbb{Q}_p}(p) = 1$ (on pourra considérer l'idèle $(p, \dots, p, \dots) \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}$).
7. Soit ℓ un nombre premier différent de p. Montrer que $\ell \in \mathbb{Z}_p^\times$ et que $r_{K_p/\mathbb{Q}_p}(\ell) = \sigma_\ell^{-1}$ (on pourra utiliser la loi de réciprocité d'Artin).
8. Conclure que si $x \in \mathbb{Z}_p^\times$, alors $r_{K_p/\mathbb{Q}_p}(x) = \sigma_{x^{-1}}$.
9. Déterminer le sous-groupe $N_{K_p/\mathbb{Q}_p}(K_p^\times)$ de $\mathbb{Q}_p^\times$.

Corrigé :

1. On a $(\zeta_{p^n}^i - 1) = (1 + \zeta_{p^n} + \cdots + \zeta_{p^n}^{i-1})(\zeta_{p^n} - 1)$. Ainsi $(\zeta_{p^n}^i - 1) \in (\zeta_{p^n} - 1)$. De même soit j tel que $ij \equiv 1\,[p^n]$. On a $\zeta_{p^n} - 1 \in (\zeta_{p^n}^i - 1)$ de sorte que finalement $(\zeta_{p^n} - 1) = (\zeta_{p^n}^i - 1)$ pour i premier à p.
2. On a
$$1 + X^{p^{n-1}} + X^{2p^{n-1}} + \cdots + X^{(p-1)p^{n-1}} = \prod_{k \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} (X - e^{\frac{2\pi i k}{p^n}}).$$
On a donc
$$\prod_{i \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} (1 - \zeta_{p^n}^i) = p = u(1 - \zeta_{p^n})^{p^{n-1}(p-1)}$$
dans $\mathcal{O}_K$ avec $u \in \mathcal{O}_K^\times$. Comme par ailleurs ζ_{p^n} est annulé par un polynôme de degré $(p-1)p^{n-1}$, on a, si e désigné l'indice de ramification d'un idéal maximal de $\mathcal{O}_K$ au-dessus de p,
$$(p-1)p^{n-1} \leqslant e \leqslant [K : \mathbb{Q}] \leqslant p^{n-1}(p-1).$$
On en conclut que $e = [K : \mathbb{Q}] = (p-1)p^{n-1}$, c'est-à-dire que $K/\mathbb{Q}$ est totalement ramifiée en p et que son degré est $(p-1)p^{n-1}$.
3. On a bien $\sigma_{ab} = \sigma_a \sigma_b$. De plus, si $\sigma_a = 1$ alors $\zeta_{p^n}^a = \zeta_{p^n}$. Comme ζ_{p^n} est un élément d'ordre p^n, on a $a \equiv 1\,[p^n]$. Ainsi le morphisme $a \mapsto \sigma_a$ est injectif. Comme sa source et son but ont le même cardinal, c'est un isomorphisme.
4. Comme p est totalement ramifié dans $K/\mathbb{Q}$, le groupe de décomposition de K en p est $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tout entier. Comme ce groupe de décomposition est isomorphe à $\mathrm{Gal}(K_p/\mathbb{Q}_p)$, on en déduit le résultat.
5. L'élément $\mathrm{Frob}_{K/\mathbb{Q}}(\ell)$ est l'unique automorphisme σ de $K/\mathbb{Q}$ tel que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{q}$ de $\mathcal{O}_K$ divisant ℓ, on a $\sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$ et tel que $\sigma(x) \equiv x^\ell\,[\mathfrak{q}]$ pour tout $x \in \mathcal{O}_K$. Soit $a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ tel que $\mathrm{Frob}_{K/\mathbb{Q}}(\ell) = \sigma_a$ et soit $\mathfrak{q}$ un idéal maximal de $\mathcal{O}_K$ divisant ℓ. Soit $\overline{\zeta}$ l'image de ζ_{p^n} dans $\mathcal{O}_K/\mathfrak{q}$. On a donc $\sigma_a(\overline{\zeta}) = \overline{\zeta}^\ell$, ainsi $\overline{\zeta}^a = \overline{\zeta}^\ell$. Le polynôme minimal de $\overline{\zeta}$ sur $\mathbb{F}_\ell$ est un diviseur de $X^{p^n} - 1$ qui est séparable dans $\mathbb{F}_\ell[X]$, on en déduit qu'il est à racines simples dans toute extension finie de $\mathbb{F}_\ell$. Ainsi l'égalité $\overline{\zeta}^a = \overline{\zeta}^\ell$ implique $\zeta^a = \zeta^\ell$ et donc $a = \ell$ dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. On a donc bien $\mathrm{Frob}_{K/\mathbb{Q}}(\ell) = \sigma_\ell$.
6. Considérons l'idéle $x = (p, \ldots, p, \ldots)$. Alors $\mathrm{Art}_{K/\mathbb{Q}}(x) = 1$. Si $\ell \neq p$, on a $K/\mathbb{Q}$ non ramifiée en ℓ et $p \in \mathbb{Z}_\ell^\times$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal de K divisant ℓ, on a donc $r_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\ell}(p) = 1$. De plus, on a $p \in \mathbb{R}_{>0} \subset N_{K_v\mathbb{R}}(K_v^\times)$ pour tout place archimédienne v de K. En particulier $r_{K_v/\mathbb{R}}(p) = 1$. On en déduit donc que $r_{K_p/\mathbb{Q}_p}(p) = 1$.

7. L'application de la loi de réciprocité d'Artin comme précédemment montre que
$$r_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_\ell}(\ell) r_{K_p/\mathbb{Q}_p}(\ell) = 1$$
et donc que $r_{K_p/\mathbb{Q}_p}(\ell) = \sigma_\ell^{-1} = \ell^{-1}$.

8. Soit $x \in \mathbb{Z}_p^\times$. D'après le théorème de Chebotarev, il existe un nombre premier ℓ tel que $\sigma_\ell = r_{K_p/\mathbb{Q}_p}(x)^{-1}$. On en déduit que l'image de x dans $\mathbb{Z}_p^\times / \operatorname{Ker}(r_{K_p/\mathbb{Q}_p})$ et l'image de ℓ coïncide. On a donc bien $r_{K_p/\mathbb{Q}_p}(x) = \sigma_\ell^{-1} = x^{-1}$.

9. La théorie du corps de classe local implique que $\operatorname{Ker} N_{K_p/\mathbb{Q}_p}(K_p^\times)$ est le noyau de $r_{K_p/\mathbb{Q}_p}$. Comme ce noyau est aussi celui de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \to \operatorname{Gal}(K_p/\mathbb{Q}_p)$ donné par $x \mapsto x^{-1}$, et contient p, on en conclut que
$$N_{K_p/\mathbb{Q}_p}(K_p^\times) = (1 + p^n\mathbb{Z}_p)p^{\mathbb{Z}}.$$