Cette note a pour but de compléter deux arguments de l'article [6]. Les hypothèses de la Proposition 4.7 doivent être légèrement renforcées, ce qui n'a pas d'impact sur le reste de l'article et la preuve de la suite spectrale (4.34) doit être complétée. Je remercie Christophe Breuil de m'avoir signalé ces deux points.

La proposition 4.7

Soit $\mathbf{Q}_p \subset L \subset K \subset \mathbf{C}_p$ une suite d'extension de corps telle que L est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et K est discrètement valué (pour la valuation p-adique de $\mathbf{C}_p$). Soit G un groupe de Lie L-analytique.

On note $\mathrm{Rep}_K^\infty G$ (resp. $\mathrm{Rep}_K^{\infty,a} G$) la catégorie des représentations lisses (resp. admissibles) de G sur des K-espaces vectoriels. Soit $D^\infty(G,K)$ l'algèbre des distributions localement constantes sur G à coefficients dans K. Elle est définie comme le dual de l'espace $C^\infty(G,K)$ des fonctions localement constantes sur G à valeurs dans K. Si V est un objet de $\mathrm{Rep}_K^\infty G$, l'action de G sur V se prolonge naturellement en une structure de $D^\infty(G,K)$-module sur V. Notons $\mathcal{M}_G^\infty$ la catégorie des $D^\infty(G,K)$-modules. On définit un foncteur contravariant $V \mapsto V^*$ de $\mathrm{Rep}_K^\infty G$ vers $\mathcal{M}_G$ en envoyant V sur le $D^\infty(G,K)$ *à gauche* sous-jacent au K-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_K(V,K)$. Il découle de [5] que V est une représentation lisse *admissible* si et seulement si V^* est un $D^\infty(G,K)$-module *coadmissible.*

Dans la preuve de [6, Prop. 4.7]. On suppose de façon implicite que si V_1 et V_2 sont deux représentations lisses du groupe G, le foncteur $V \mapsto V^*$ induit une bijection de $\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Rep}_K^\infty G}(W_1,W_2)$ sur $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}_G^\infty}(W_2^*,W_2^*)$. Je ne sais pas si cet énoncé est vrai en général. Il est vrai si W_1 et W_2 sont des représentations admissibles et le but de cette note est d'en fournir une démonstration. La preuve de la proposition 4.7 de [6] n'est donc complète que lorsque W_1 et W_2 sont supposées *admissibles.* Néanmoins dans toutes les applications de la proposition 4.7 dans l'article [6], le cas où W_1 et W_2 sont admissibles est suffisant. Ces applications sont les résultats suivants de [loc. cit.] : Cor. 4.8, Exem. 4.11, Prop. 5.7, Thm. 6.1 et Cor. 6.2.

On va définir un foncteur contravariant de la catégorie $\mathcal{M}_G^\infty$ vers la catégorie $\mathrm{Rep}_K^\infty G$. On rappelle que $\mathcal{D}_K^\infty(G)$ désigne le dual de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(G,K)$ des fonctions localement constantes à support compact de G dans K. Comme $\mathcal{C}_c^\infty(G,K)$ est une représentation lisse de G, le K-espace vectoriel $\mathcal{D}_K^\infty(G)$ est un $D^\infty(G,K)$-module. Notons par ailleurs δ_G le caractère modulaire de G et δ_G^* son dual. Rappelons que si M est un $D^\infty(G,K)$-module, on note M^{sm} le sous-K-espace vectoriel des vecteurs *lisses.* L'action de G sur M^{sm} est lisse si bien que l'on peut voit M^{sm} comme un objet de la catégorie $\mathrm{Rep}_K^\infty G$. On pose alors, pour M un objet de $\mathcal{M}_G^\infty$:

$$M^d := \mathrm{Hom}_{D^\infty(G,K)}(M, \mathcal{D}_c^\infty(G) \otimes \delta_G^*)^{\mathrm{sm}}.$$

Proposition 0.1. *Il existe un morphisme de foncteurs* $\mathrm{Id}_{\mathrm{Rep}_K^\infty G} \to ((-)^*)^d$ *(resp.* $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_G^\infty} \to ((-)^d)^*$*) qui induit des isomorphismes sur les objets admissibles (resp. coadmissibles).*

Démonstration. Si V est un objet de $\mathrm{Rep}_K^\infty G$, notons $V^\sim$ la représentation contragrédiente. Il s'agit du K-espace vectoriel $(V^*)^\sim$ muni de la représentation induite de G. D'après [5, Lem. 1.4], il existe un isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{Hom}_{D^\infty(G,K)}((-)^*, \mathcal{D}_c^\infty(G) \otimes \delta_G^*) \simeq ((-)^\sim)^*$$

de sorte que le foncteur $((-)^*)^d$ est isomorphe au foncteur $((-)^\sim)^\sim$. Le morphisme recherché est alors le morphisme de bidualité $\mathrm{Id}_{\mathrm{Rep}_K^\infty G} \to ((-)^\sim)^\sim$ qui induit un isomorphisme sur les objets admissibles (voir par exemple [7, Prop. I.4.18]).

Soit M un $D^\infty(G,K)$-module. On a alors un isomorphisme fonctoriel (voir par exemple [1, II.§4.Prop. 1. a)]) :

$$\mathrm{Hom}_{D^\infty(G,K)}(M, \mathcal{D}_c^\infty(G) \otimes \delta_G^*) \simeq \mathrm{Hom}_K((C_c^\infty(G,K) \otimes_K \delta_G) \otimes_{D^\infty(G,K)} M, K)$$

Par ailleurs, il découle de [5, Lem. 1.3] qu'il existe un isomorphisme de foncteurs $(-)^{sm} \simeq (C_c^\infty(G,K) \otimes_K \delta_G) \otimes_{D^\infty(G,K)} (-)$ de sorte qu'il existe un isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{Hom}_{D^\infty(G,K)}(-, \mathcal{D}_c^\infty(G) \otimes \delta_G^*) \simeq ((-)^{sm})^* \tag{0.1}$$

On en déduit un isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{Hom}_{D^\infty(G,K)}(\mathrm{Hom}_{D^\infty(G,K)}(-, \mathcal{D}_c^\infty(G) \otimes \delta_G^*), \mathcal{D}_c^\infty(G) \otimes \delta_G^*) \simeq ((-)^d)^* \tag{0.2}$$

Le morphisme de foncteurs $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_G^\infty} \to ((-)^d)^*$ est défini en composant le morphisme de bidualité

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_G^\infty} \to \mathrm{Hom}_{D^\infty(G,K)}(\mathrm{Hom}_{D^\infty(G,K)}(-, \mathcal{D}_c^\infty(G) \otimes \delta_G^*), \mathcal{D}_c^\infty(G) \otimes \delta_G^*)$$

avec (0.2). Si M est un $D^\infty(G,K)$-coadmissible, on a $M = V'$ où V est un objet admissible de $\mathrm{Rep}_K^\infty G$. Le fait que le morphisme de foncteur évalué sur M induit un isomorphisme est alors une conséquence de l'isomorphisme (0.1). En effet M^d est isomorphe à $((M^{sm})^*)^{sm} \simeq (V^\sim)^\sim \simeq V$ et donc $(M^d)^*$ est isomorphe à $V^* = M$. □

Si $\mathcal{C}$ désigne une catégorie abélienne ayant suffisamment d'éléments injectifs, on peut définir les groupes d'extensions supérieurs $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^n(-,-)$ pour $n \geqslant 0$. Ils admettent la description suivante en termes de suite exactes longues. Si A et B sont deux objets de la catégorie $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A,B)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de complexes exacts

$$C^\bullet = [0 \to B \to C^1 \to \cdots \to C^n \to A \to 0]$$

deux complexes C_1 et C_2 étant équivalents s'il existe un troisième complexe exact C_0 de la forme précédente ainsi que des morphismes de complexes $C_0 \to C_1$ et $C_0 \to C_2$ induisant l'identité sur A et B.

Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux catégories abéliennes ayant suffisamment d'injectifs et si F est un foncteur exact covariant (resp. contravariant) de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On définit une application F_* de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_1}^n(A,B)$ vers $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_2}^n(F(A),F(B))$ (resp. $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_2}^n(F(B),F(A))$) en envoyant un complexe exact C sur le complexe exact $F(C)$.

Remarquons que si F est covariant et que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$, l'existence d'un morphisme de foncteurs $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}_1} \to F$ induisant un isomorphisme sur deux objets A et B implique que l'endomorphisme F_* de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A,B)$ est un isomorphisme.

Rappelons que la catégorie $\mathrm{Rep}_K^\infty G$ possède suffisamment d'injectifs (voir par exemple [7, Prop. I.5.9.c)]).

On déduit donc de la formule $(G\circ F)_* = G_*\circ F_*$ et de la proposition 0.1 le résultat suivant.

Corollaire 0.2. *Soient V_1 et V_2 deux objets admissibles de $\mathrm{Rep}_K^\infty G$. Le foncteur $(-)^*$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Rep}_K^\infty G}(A,B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}_G^\infty}(B^*,A^*).$$

Démonstration. Posons $F=(-)^*$ le foncteur contravariant de $\mathrm{Rep}_K^\infty G$ vers $\mathcal{M}_G^\infty$. Il s'agit clairement d'un foncteur exact. De même le foncteur $G=(-)^d$ de $\mathcal{M}_G^\infty$ vers $\mathrm{Rep}_K^\infty G$ est un foncteur exact. En effet, on a vu au cours de la preuve de la proposition que $(-)^d$ est isomorphe au foncteur $\mathrm{Hom}_K((-)^{sm},K)^{sm}$ qui est une composée de trois foncteurs exacts. Le foncteur $(-)^{sm}$ est exact car K est de caractéristique 0. Par ailleurs, l'existence d'un morphisme de foncteurs $\mathrm{Id}_{\mathrm{Rep}_K^\infty G}\to G\circ F$ ayant la propriété d'être un isomorphisme sur les objets admissibles implique que la composée

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Rep}_K^\infty G}(V_1,V_2)\xrightarrow{F_*}\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}_G^\infty}(V_2^*,V_1^*)\xrightarrow{G_*}\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Rep}_K^\infty G}(G(F(V_1)),G(F(V_2)))$$

est bijective. L'existence d'un morphisme de foncteur $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_G^\infty}\to F\circ G$ dont l'évaluation sur les objets coadmissibles est un isomorphisme implique que la composée

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}_G^\infty}(V_2^*,V_1^*)\xrightarrow{G_*}{}&\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Rep}_K^\infty G}(G(F(V_1)),G(F((V_2))))\\ &\xrightarrow{F_*}\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}_G^\infty}(F(G(V_2^*)),F(G(V_1^*)))\end{aligned}$$

est bijective. Ainsi F_* et G_* sont injectifs avec $G_*\circ F_*$ bijectif, donc F_* est un isomorphisme. $\square$

La suite spectrale (4.34)

Rappelons le contexte. On considère $\underline{G}$ un groupe réductif connexe sur $\mathbf{Q}_p$ ainsi que $\underline{P}\subset\underline{G}$ un sous-groupe parabolique. On note *underlineN* son radical unipotent ainsi que $\underline{L}$ le quotient $\underline{P}/\underline{N}$. On pose $G=\underline{G}(\mathbf{Q}_p)$, $P=\underline{P}(\mathbf{Q}_p)$, $N=\underline{N}(\mathbf{Q}_p)$ et $L=\underline{L}(\mathbf{Q}_p)$ qui est isomorphe à P/N. Si H est un groupe de Lie p-adique (par exemple l'un des groupes précédents), on note $D(H)$ l'algèbre des distributions sur H à valeurs dans un corps K, extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $\mathcal{M}(H)$ la catégorie des $D(H)$-modules. Par abus de langage, on désigne par K le $D(N)$-module trivial. Si M_1 est un $D(L)$-module et M_2 un $D(P)$-module, on a une suite spectrale ([6, (4.34)])

$$E_2^{p,q}=\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{M}(L)}(M_1,\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(N)}(K,M_2))\Rightarrow\mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{M}(P)}(M_1,M_2).$$

Soit $\mathrm{Oub}_{P,N}$ le foncteur d'oubli de la catégorie $\mathcal{M}(P)$ vers la catégorie $\mathcal{M}(N)$. Pour établir cette suite, on utilise en effet de façon implicite le fait que, pour tout $i\geqslant 0$, le i-ème foncteur dérivé du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(N)}(K,\mathrm{Oub}_{P,N}(-))$ coïncide avec le foncteur $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}(N)}(K,\mathrm{Oub}_{P,N}(-))$. Il faut donc prouver le résultat suivant.

Proposition 0.3. *Si $\mathcal{F}$ désigne le foncteur $M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(N)}(K, M)$ de la catégorie des $D(P)$-modules vers la catégorie des $D(L)$-modules, on a, pour tout $D(P)$-module M, un isomorphisme de K-espaces vectoriels*

$$R^i\mathcal{F}(M) \simeq \mathrm{Ext}^i_{D(N)}(K, M).$$

Démonstration. Comme $\mathcal{F}$ est le composé du foncteur d'oubli $\mathrm{Oub}_{P,N}$ avec le foncteur $\mathrm{Hom}_{D(N)}(K, -)$, et que le foncteur $\mathrm{Oub}_{P,N}$ est exact, il suffit de vérifier que ce dernier transforme un objet injectif de $\mathcal{M}(P)$ en un objet $\mathrm{Hom}_{D(N)}(K, -)$-acyclique de $\mathcal{M}(N)$. Autrement il faut prouver que si M est un $D(P)$-module injectif, on a $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}(N)}(K, M) = 0$ pour $i > 0$. Si H est un groupe de Lie p-adique et H_0 est un sous-groupe compact ouvert de H, on note $\Lambda(H) = K[H] \otimes_{\mathcal{O}_K[H]} \mathcal{O}_K[[H_0]]$. À isomorphisme canonique près, cette K-algèbre ne dépend pas du choix de H_0. De plus, si P est compact, on a $\Lambda(P) = K \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_K[[P]]$. D'après [4, Thm. 5.2], le $\Lambda(H_0)$-module (à gauche comme à droite) $D(H_0)$ est plat, ainsi $D(H)$ est un $\Lambda(H)$-module plat (à gauche ou à droite).

Soit P_0 un sous-groupe compact ouvert de P et $N_0 = N \cap P_0$. Le sous-groupe N_0 est compact et ouvert dans N. De plus, on a isomorphisme de $\Lambda(P_0)$-modules à droite

$$\Lambda(P) \simeq K[P/P_0] \otimes_K \Lambda(P_0)$$

qui prouve que $\Lambda(P)$ est un $\Lambda(P_0)$-module plat. D'après le lemme 0.4 ci-dessous, $\Lambda(P_0)$ est un $\Lambda(N_0)$-module plat, et donc $\Lambda(P)$ est un $\Lambda(N_0)$-module plat. Or on peut trouver une famille (P_n) de sous-groupes compacts ouverts de P telle que $(N_n := N \cap P_n)$ forme une suite croissante de sous-groupes compacts ouverts de N telle que $N = \bigcup_n N_n$ (voir par exemple [2, §4.1]). On vérifie facilement que l'application naturelle $\varinjlim_n \Lambda(N_n) \xrightarrow{\sim} \Lambda(N)$ est un isomorphisme. Comme $D(P)$ est un $\Lambda(N_n)$-module plat pour tout n, c'est un $\Lambda(N)$-module plat. Comme le foncteur d'oubli de la catégorie des $D(P)$-modules vers la catégorie des $\Lambda(N)$-modules est adjoint à droite du foncteur $D(P) \otimes_{\Lambda(N)} -$, tout $D(P)$-module injectif est aussi un $\Lambda(N)$-module injectif.

Soit S un $\Lambda(N)$-module. Comme $D(N)$ est un $\Lambda(N)$-module plat, on a, pour tout $D(N)$-module M, et tout $i \geqslant 0$, un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}(N)}(D(N) \otimes_{\Lambda(N)} S, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_{\Lambda(N)-\mathrm{Mod}}(S, M).$$

En particulier, si M est un $D(P)$-module injectif, on en déduit que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}(N)}(D(N) \otimes_{\Lambda(N)} S, M) = 0$ pour $i > 0$. On conclut alors en remarquant que si K est le $\Lambda(N)$-module trivial, alors $D(N) \otimes_{\Lambda(N)} K = K$. En effet, $D(N) \otimes_{\Lambda(N)} K = D(N_0) \otimes_{\Lambda(N_0)} K$ est un $D(N_0)$-module coadmissible, il a donc une structure canonique d'espace de Fréchet et contient un sous-K-espace vectoriel dense de dimension 1. $\square$

Lemme 0.4. *Soient H un groupe de Lie p-adique compact, H' un sous-groupe fermé. Alors $\mathcal{O}_K[[H]]$ est un $\mathcal{O}_K[[H']]$-module plat (à gauche ou à droite). En particulier $\Lambda(H)$ est un $\Lambda(H')$-module plat.*

Démonstration. Soit I un idéal de type fini de $\mathcal{O}_K[[H']]$. Il suffit de prouver que l'application $\mathcal{O}_K[[H]] \otimes_{\mathcal{O}_K[[H']]} I \to \mathcal{O}_K[[H]]$ est injective. Comme l'anneau $\mathcal{O}_K[[H']]$ est noethérien, l'idéal I est en fait un $\mathcal{O}_K[[H']]$-module de présentation finie. On en conclut que $\mathcal{O}_K[[H]] \otimes_{\mathcal{O}_K[[H']]} I$ est le conoyau d'une application linéaire continue entre deux

$\mathcal{O}_K[[H]]$-modules libres de type fini donc compacts, il est donc séparé et complet pour la topologie quotient et isomorphe au $\mathcal{O}_K[[H]]$-module $\mathcal{O}_K[[H]]\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_K[[H']]}I$. Il existe un isomorphisme de variétés analytiques p-adiques $(H/H') \times H' \xrightarrow{\sim} H$ (car il existe une section continue à la projection $H \to H/H'$) qui implique l'existence d'un isomorphisme $\mathcal{O}_K[[H/H']]\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_K[[H']] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_K[[H]]$, où $\mathcal{O}_K[[H/H']]$ désigne le $\mathcal{O}_K$-module compact des fonctions continues de H/H' dans $\mathcal{O}_K$, ainsi qu'un isomorphisme $\mathcal{O}_K[[H]] \otimes_{\mathcal{O}_K[[H']]} I \simeq \mathcal{O}_K[[H/H']]\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}I$. D'après [3, Prop. 3.1], le foncteur $\mathcal{O}_K[[H/H']]$ est exact sur les suites exactes courtes de $\mathcal{O}_K$-modules profinis. On applique ce résultat à la suite $0 \to I \to \mathcal{O}_K[[H']] \to \mathcal{O}_K[[H']]/I \to 0$ ce qui permet de conclure. □

Il reste peut-être à préciser pourquoi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(N)}(K, M)$ est muni d'une structure de $D(L)$-module lorsque M est un $D(P)$-module. En effet, l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(N)}(K, M)$ s'identifie à un sous-K-espace vectoriel de M sur lequel l'action de $D(P)$ se factorise par $D(P) \otimes_{D(N)} K$ qui est isomorphe à $D(L)$.

Références

[1] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Algèbre.*

[2] M. Emerton, « Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups I. Construction and first properties », *Ann. sci. É.N.S.* **39** (2006), p. 775–839.

[3] J.-M. Fontaine, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Astérisque **47-48** (1977).

[4] P. Schneider et J. Teitelbaum, *Algebras of p-adic distributions and admissible representations*, Invent. Math. **153** (2003), 145–196.

[5] P. Schneider et J. Teitelbaum, *Duality for admissible locally analytic representations*, Represent. Theory **9** (2005), 297–326.

[6] B. Schraen, *Représentations localement analytiques de* $\mathrm{GL}_3(\mathbf{Q}_p)$, Annales Scientifiques de l'É.N.S., **44** n° 1 (2011), 43–145.

[7] M.-F. Vignéras, *Représentations ℓ-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $\ell \neq p$*, Progress in Mathematics **137** (1996).