Sur la fidélité de certaines représentations de $\mathrm{GL}_2(F)$ sous une algèbre d'Iwasawa [*]

Yongquan Hu [†] Stefano Morra [‡] Benjamin Schraen [§]

Résumé

Soit F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_F$ et E une extension de $\mathbb{F}_p$. L'action naturelle de $\mathcal{O}_F^\times$ sur $\mathcal{O}_F$ se prolonge alors en une action continue sur l'algèbre d'Iwasawa $E[[\mathcal{O}_F]]$. Dans ce travail, on démontre que les idéaux non nuls de $E[[\mathcal{O}_F]]$ stables par $\mathcal{O}_F^\times$ sont ouverts. En particulier, on déduit la fidélité de l'action de l'algèbre d'Iwasawa des matrices unipotentes supérieures de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ sur une représentation lisse irréductible de dimension infinie de $\mathrm{GL}_2(F)$.

Table des matières

1 Introduction

Soient p un nombre premier, F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et E une extension de $\mathbb{F}_p$. Posons $G = \mathrm{GL}_2(F)$. Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, les travaux de Barthel-Livné puis Breuil ([6], [8]) aboutissent à une classification des E-représentations lisses irréductibles de G ayant un caractère central. Lorsque $F \neq \mathbb{Q}_p$, le même problème n'est pas résolu. Malgré des avancés de Breuil et Paškūnas ([9]) permettant de construire des familles de représentations irréductibles, on est encore loin de comprendre quels paramètres doivent intervenir dans la classification de ces représentations irréductibles à isomorphisme près (voir par exemple les travaux de l'un d'entre nous dans [11]).

---

[*] *Mathematics Subject Classification* : 22E50, 13F25

[†] Université de Rennes 1

[‡] Université de Montpellier 2

[§] Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines/CNRS

Dans ce travail, nous nous intéressons à un problème plus simple. Considérons U le sous-groupe compact de G constitué des matrices unipotentes supérieures à coefficients dans $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F. Si π est une représentation lisse de G sur un E-espace vectoriel, l'action de U sur π s'étend naturellement en une action de l'algèbre de groupe complétée, ou algèbre d'Iwasawa, $E[[U]]$. Par lissité, tout élément de π est annulé par un idéal ouvert de $E[[U]]$. Il est facile de voir qu'un tel idéal ne peut annuler toute la représentation π lorsque π est de dimension infinie. Cependant, il n'est pas clair *a priori* qu'il n'existe pas d'idéal non nul de $E[[U]]$ annulant toute la représentation π. En d'autres termes, est-ce que π est un module fidèle sous l'action de $E[[U]]$? Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, la question est facile à résoudre car $E[[U]] \simeq E[[X]]$ est un anneau complet de valuation discrète, ses idéaux non nuls sont donc tous ouverts. En revanche, $E[[U]]$ est, dans le cas général, un anneau local régulier de dimension $[F : \mathbb{Q}_p]$. Nous prouvons dans ce travail que si π est une représentation lisse irréductible de dimension infinie de G, l'action de $E[[U]]$ est toujours fidèle. Plus précisément nous prouvons le résultat suivant. Nous considérons le sous-groupe $T_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_F^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subset G$. Il agit continûment sur U par conjugaison, donc sur l'algèbre complétée $E[[U]]$.

Théorème 1.1. *Soit $I \subset E[[U]]$ un idéal stable sous l'action d'un sous-groupe ouvert de T_0. Alors $I = 0$ ou I est ouvert dans $E[[U]]$.*

Les techniques que nous employons pour démontrer ce résultat sont classiques pour l'étude des algèbres d'Iwasawa ([3], [4], [2]). Le cas où F est non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ peut même se traiter directement à partir du résultat principal de [2]. Néanmoins le cas totalement ramifié demande déjà un traitement relativement différent. Nous avons donc dû dévisser différemment les arguments de [2] pour les intégrer à notre preuve et ainsi traiter de front les différents cas. [1]

Le théorème 1.1 est utilisé dans un autre travail de l'un des auteurs, consacré aux représentations supersingulières du groupe $\mathrm{GL}_2(F)$. Il s'agit de l'ingrédient principal permettant de prouver le lemme 2.5 de [14].

Remerciements : Nous remercions Christophe Breuil pour avoir porté ce problème à notre attention, ainsi que pour plusieurs remarques sur une première version de ce travail. Nous remercions Ramla Abdellatif pour ses remarques qui ont beaucoup amélioré la forme finale de cet article. Enfin nous remercions le referee pour ses remarques qui ont permis d'améliorer la rédaction de cet article, notamment en ce qui concerne le corollaire 3.8.

Notations : Fixons p un nombre premier et E un corps de caractéristique p. Soient F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ de degré n, $\mathcal{O}_F$ son anneau des entiers, k_F son corps résiduel, $f = [k_F : \mathbb{F}_p]$, $q = p^f$ et e l'indice de ramification de F sur $\mathbb{Q}_p$, de sorte que $n = ef$ et $k_F \simeq \mathbb{F}_q$.

1. Après l'écriture de cet article, K. Ardakov a prouvé un analogue d'un théorème de Zalesskii dans le cadre des algèbres de groupes complétées. Le théorème 1.1 peut alors aussi être vu comme une conséquence de [1, Thm. B].

Le groupe additif $\mathcal{O}_F$ est un pro-p-groupe uniforme (cf. [10], §4.1). Le groupe $\Gamma = 1 + p\mathcal{O}_F$ agit donc continûment sur $\mathcal{O}_F$ au moyen de la multiplication de l'anneau $\mathcal{O}_F$. Notons $E[[\mathcal{O}_F]]$ l'algèbre d'Iwasawa de $\mathcal{O}_F$ à coefficients dans E :

$$E[[\mathcal{O}_F]] := \varprojlim_H E[\mathcal{O}_F/H]$$

où H parcourt les sous-groupes ouverts de $\mathcal{O}_F$. Notons ε le morphisme de groupes de $\mathcal{O}_F$ dans $E[[\mathcal{O}_F]]^\times$ obtenu par passage à la limite des morphismes quotient $\mathcal{O}_F/H \to E[\mathcal{O}_F/H]^\times$. L'anneau $E[[\mathcal{O}_F]]$ est local, complet et noethérien, et son idéal maximal est engendré par les éléments $\varepsilon(u) - 1$ pour $u \in \mathcal{O}_F$ (cf. [10, §7.4]).

Comme $\mathcal{O}_F/p\mathcal{O}_F \simeq k_F[X]/(X^e)$, les choix d'une uniformisante $\varpi \in \mathcal{O}_F$ et d'un élément primitif λ de k_F sur $\mathbb{F}_p$ nous donnent un isomorphisme d'anneaux locaux complets

$$E[[X_{i,k}; 0 \leq i \leq e-1, 0 \leq k \leq f-1]] \xrightarrow{\sim} E[[\mathcal{O}_F]] \tag{1}$$

au moyen de l'identification

$$X_{i,k} \longmapsto \varepsilon(\varpi^i[\lambda^k]) - 1$$

pour tout $0 \leq i \leq e-1$, $0 \leq k \leq f-1$, où $[\lambda^k] \in \mathcal{O}_F$ désigne le représentant de Teichmüller de λ^k.

Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux d'un anneau commutatif A, on note $\sqrt{\mathfrak{a}}$ le radical de $\mathfrak{a}$ et $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ l'idéal des éléments $x \in A$ tels que $x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.

Si V est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel on désigne par $\mathbb{P}(V)$ le projectivisé de V, c'est-à-dire l'ensemble des sous-espaces de dimension 1 de V. Si $S \subset \mathbb{P}(V)$, on note alors $\prod_{l \in S} l$ le produit $\prod_{l \in S} w_l \in \mathrm{Sym}(V)$ où w_l est un générateur de la droite l pour tout $l \in S$. Il s'agit d'un élément bien défini de $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}(V))$.

Dans toute la suite, lorsque W est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel, on note W^* l'espace des formes $\mathbb{F}_p$-linéaires de W dans $\mathbb{F}_p$.

2 Un peu d'algèbre commutative

Cette partie contient quelques préliminaires techniques à la preuve du théorème principal.

2.1 La fonction δ

Soient $A = E[[X_1, ..., X_n]]$ l'anneau des séries formelles en n variables à coefficients dans E et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. L'anneau A est complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. On note deg la fonction degré associée à la filtration $\mathfrak{m}$-adique. Plus précisément, pour $x \in A$, $\deg(x)$ est le plus grand entier k tel que $x \in \mathfrak{m}^k$. Par convention, on pose $\deg(0) = +\infty$. La fonction deg définit une valuation sur A, autrement dit, on a $\deg(x + y) \geq \min\{\deg(x), \deg(y)\}$ et $\deg(xy) = \deg(x) + \deg(y)$ pour $x, y \in A$. Plus généralement, si $r \in [0, +\infty[$, on note $\mathfrak{m}^r$ l'ensemble des $x \in A$ tels que $\deg(x) \geq r$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. On munit $A/\mathfrak{p}$ de la topologie $\mathfrak{m}$-adique et pour tout élément $x \in A$ on note $\nu(x)$ le degré de l'image de x dans $A/\mathfrak{p}$. Autrement dit, $\nu(x)$ est le plus grand entier k tel que $x \in \mathfrak{p}+\mathfrak{m}^k$, avec la convention $\nu(x) = +\infty$ si $x \in \bigcap_{k \geq 1}(\mathfrak{p}+\mathfrak{m}^k)$.

Comme A est noethérien et complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique tout ses idéaux sont fermés, donc $\mathfrak{p} = \bigcap_{k\geq 1}(\mathfrak{p} + \mathfrak{m}^k)$. Ainsi $\nu(x) = +\infty$ si et seulement si $x \in \mathfrak{p}$. On a toujours $\nu(x) \geq \deg(x)$ mais ν n'est pas nécessairement une valuation : on a seulement la propriété plus faible $\nu(xy) \geq \nu(x) + \nu(y)$ si $x, y \in A$.

Définition 2.1. *Pour $x, P \in A$, on note $\delta(x, P)$ l'élément suivant de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$:*

$$\delta(x, P) := \sup_{k\geq 0}\big\{\nu(x^k P) - \deg(x^k P)\big\},$$

avec la convention $\delta(x, P) = +\infty$ si x ou P est nul.

On écrira $\delta(x)$ au lieu de $\delta(x, 1)$.

L'inégalité $\nu(xy) \geq \nu(x) + \nu(y)$ implique que pour des éléments non nuls x et P de A, on a :

$$\nu(x^{k+1}P) - \deg(x^{k+1}P) \geq \nu(x^k P) - \deg(x^k P) + \nu(x) - \deg(x).$$

Ainsi la fonction $k \mapsto \nu(x^k P) - \deg(x^k P)$ est croissante, ce qui permet d'écrire :

$$\delta(x, P) = \lim_{k\to\infty}\big[\nu(x^k P) - \deg(x^k P)\big]. \tag{2}$$

Soit $\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_{k\geq 0} \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ l'anneau gradué de A muni de la filtration $\mathfrak{m}$-adique. Il est isomorphe à un anneau de polynômes à n variables.

Pour $x \in A$ non nul, on note $\sigma(x) := x \mod \mathfrak{m}^{\deg(x)+1} \in \mathrm{gr}(A)$ le symbole de x et l'on pose $\mathrm{gr}(\mathfrak{p})$ l'idéal de $\mathrm{gr}(A)$ engendré par les symboles $\sigma(x)$ pour $x \in \mathfrak{p}$. C'est un idéal gradué de $\mathrm{gr}(A)$ qui vérifie :

$$\mathrm{gr}(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{k\geq 0}(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}^k)/(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}^{k+1}) \subseteq \mathrm{gr}(A).$$

Le lemme suivant résume quelques propriétés de la fonction δ.

Lemme 2.2. *Soit $x \in A$ un élément non nul.*

(i) La fonction $\delta : A \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ne prend que les valeurs 0 et $+\infty$ et $\delta(x) = +\infty \Leftrightarrow \sigma(x) \in \sqrt{\mathrm{gr}(\mathfrak{p})}$.

(ii) On a $\delta(x) = 0$ (resp. $= +\infty$) si et seulement si pour tout $P \notin \mathfrak{p}$, $\delta(x, P) < +\infty$ (resp. $= +\infty$).

(iii) Soit x un élément non nul de A vérifiant $\delta(x) = +\infty$. Il existe $\eta > 0$ et $k_0 \geq 0$ tels que pour tout $k \geq k_0$,

$$\nu(x^k) \geq (1 + \eta)\deg(x^k).$$

Démonstration. (i) La condition $\sigma(x) \in \sqrt{\mathrm{gr}(\mathfrak{p})}$ est équivalente à l'existence d'un entier $k_0 \geq 1$ tel que

$$\nu(x^{k_0}) \geq \deg(x^{k_0}) + 1.$$

Par conséquent, si $\sigma(x) \in \sqrt{\mathrm{gr}(\mathfrak{p})}$, alors :

$$\forall m \geq 1, \quad \nu(x^{mk_0}) \geq m\nu(x^{k_0}) \geq m + \deg(x^{mk_0}),$$

d'où $\delta(x) = +\infty$ d'après (2). D'autre part, si $\sigma(x) \notin \sqrt{\mathrm{gr}(\mathfrak{p})}$, alors $\nu(x^k) = \deg(x^k)$ pour tout $k \geq 1$, donc $\delta(x) = 0$.

(ii) Montrons tout d'abord que $\delta(x) = +\infty$ si et seulement si $\delta(x, P) = +\infty$ pour tout $P \in A$. En prenant $P = 1$, on voit que la condition est suffisante. De plus, comme $\nu(x^k P) \geq \nu(x^k) + \deg(P)$, on a bien $\delta(x, P) = +\infty$ si $\delta(x) = +\infty$, d'où la nécessité.

Supposons maintenant $\delta(x) = 0$. D'après [12, corollaire 3.14], qui est une conséquence du lemme d'Artin-Rees, on sait que si $P \notin \mathfrak{p}$ alors il existe un entier $k_0 \geq 0$ tel que :

$$\forall k \geq k_0, \quad ((\mathfrak{p} + \mathfrak{m}^k) : P) \subseteq (\mathfrak{p} : P) + \mathfrak{m}^{k-k_0} = \mathfrak{p} + \mathfrak{m}^{k-k_0},$$

où l'égalité vient de l'hypothèse $P \notin \mathfrak{p}$. On en déduit que pour k assez grand (tel que $\nu(x^k P) \geq k_0$) on a :

$$\nu(x^k) \geq \nu(x^k P) - k_0,$$

dont on déduit que

$$\nu(x^k P) - \deg(x^k P) \leq (\nu(x^k) - \deg(x^k)) + (k_0 - \deg(P)) = k_0 - \deg(P).$$

Ceci prouve la nécessité. La suffisance s'obtient en prenant $P = 1$.

(iii) La preuve de (i) nous donne un entier $k_0 \geq 1$ tel que $\nu(x^{k_0}) \geq 1 + \deg(x^{k_0})$. Notons que la condition $\delta(x) = +\infty$ entraîne $\deg(x) \neq 0$. Pour $k \geq k_0$ posons $m = \lfloor k/k_0 \rfloor$ la partie entière de k/k_0 ; on a alors

$$\nu(x^k) \geq m + \deg(x^k) \geq \deg(x^k)\big(1 + \frac{m}{k \deg(x)}\big) \geq \deg(x^k)\big(1 + \frac{1}{2k_0 \deg(x)}\big).$$

Il suffit donc de prendre $\eta = \frac{1}{2k_0 \deg(x)}$ pour conclure. □

2.2 Le contrôleur d'un idéal

Soit G un pro-p-groupe et $E[[G]]$ l'algèbre d'Iwasawa de G. Soient I un idéal de $E[[G]]$ et H un sous-groupe fermé de G. On dit que I est *contrôlé par* H, ou que H *contrôle* I, lorsque I est topologiquement engendré par un sous-ensemble de $E[[H]]$ ou, de manière équivalente, si

$$I = \overline{(I \cap E[[H]]) \cdot E[[G]]}.$$

Si $G = \mathcal{O}_F$, voici un critère pour prouver que I est controlé par le sous-groupe ouvert $\varpi\mathcal{O}_F$.

Lemme 2.3. *Soit I un idéal de $E[[\mathcal{O}_F]]$. L'idéal I est contrôlé par $\varpi\mathcal{O}_F$ si et seulement si I est stable par les dérivations $\frac{\partial}{\partial X_{0,k}}$ pour $0 \leq k \leq f-1$.*

Démonstration. C'est un cas particulier de [4, proposition 2.4(d)]. □

2.3 Quelques résultats sur les matrices de polynômes

Pour pouvoir appliquer le lemme 2.3, il nous faut pouvoir écrire les dérivations $\frac{\partial}{\partial X_{0,k}}$ en fonctions des dérivations de $E[[\mathcal{O}_F]]$ induites par l'action de Γ. C'est l'objet de cette partie. Plus précisément considérons un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel V de dimension finie. Les dérivations de l'algèbre $\mathrm{Sym}(V)$ s'identifient aux morphismes $\mathrm{Sym}(V)$-linéaires

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sym}(V)}(\mathrm{Sym}(V) \otimes_{\mathbb{F}_p} V, \mathrm{Sym}(V))$, c'est-à-dire aux applications $\mathbb{F}_p$-linéaires de V dans $\mathrm{Sym}(V)$. Nous allons désormais raisonner en termes d'applications $\mathbb{F}_p$-linéaires. Soit ϕ l'inclusion canonique de V dans $\mathrm{Sym}(V)$. On note ϕ^{p^n} l'application $\mathbb{F}_p$-linéaire de V dans $\mathrm{Sym}(V)$ obtenue en posant $\phi^{p^n}(v) = \phi(v)^{p^n}$ pour tout $v \in V$. La proposition 1.4 de [3] montre que si g est une forme linéaire de V, on peut l'écrire, quitte à multiplier g par un élément homogène bien choisi de $\mathrm{Sym}(V)$, comme une combinaison $\mathrm{Sym}(V)$-linéaire des $\dim(V)$ applications $\phi^{p^n}, \ldots, \phi^{p^{n+\dim(V)-1}}$ pour tout choix d'un entier $n \geq 0$. Dans cette partie, nous reprenons la preuve de [3, proposition 1.4] afin d'obtenir une borne inférieure pour les degrés des coefficients de cette combinaison linéaire.

Proposition 2.4. *Fixons $g \in V^*$. Soient $m = \dim V$ et $\mathfrak{m}_V$ l'idéal maximal de* $\mathrm{Sym}(V)$ *engendré par V. Alors pour $s \geq 0$, on a la relation suivante dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, \mathrm{Sym}(V))$ *:*

$$\Big(\prod_{w \in \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\ker g)} w \Big)^{p^s} \cdot g \in \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{m}_V^{p^s(p^{m-1}-p^{j-1})} \phi^{p^{s+j-1}}.$$

La preuve de la proposition 2.4 consiste essentiellement à combiner la formule de Cramer à des estimations du degré des mineurs d'une matrice de Vandermonde. Les notations suivantes sont issues de [3, §1].

Soit $\{w_1, ..., w_m\}$ une base de V sur $\mathbb{F}_p$. On note $M(w_1, ..., w_m) \in M_m(\mathrm{Sym}(V))$ la matrice de type Vandermonde associée :

$$M(w_1, ..., w_m) = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \\ w_1^p & w_2^p & \cdots & w_m^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1^{p^{m-1}} & w_2^{p^{m-1}} & \cdots & w_m^{p^{m-1}} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Soit $\mathrm{Com}(M(w_1, ..., w_m))$ sa comatrice, dont on rappelle que le (i,j)-ème terme est égal à $(-1)^{i+j} \det C_{ij}$, où C_{ij} est le bloc de $M(w_1, ..., w_m)$ obtenu en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne. La formule de Cramer s'écrit alors

$$M(w_1, ..., w_m) \cdot {}^t\mathrm{Com}(M(w_1, ..., w_m)) = \det M(w_1, .., w_m) \cdot \mathrm{Id}_m.$$

Pour $j \in \{1, ..., m\}$, notons $W_j \subset V$ le sous-$\mathbb{F}_p$-espace vectoriel engendré par $\{w_i : i \neq j\}$ et définissons les matrices

$$M(w_1, ..., \hat{w}_j, ..., w_m) := M(w_1, ..., w_{j-1}, w_{j+1}, ..., w_m).$$

Il est prouvé dans [3, proposition 1.2] que $\det M(w_1, ..., \hat{w}_j, ..., w_m)$ divise tous les $\det C_{ij}$ pour $1 \leq i \leq m$ et que $\det(M(w_1, \ldots, w_m))$ est un polynôme homogène de degré $|\mathbb{P}(\mathbb{F}_p^m)|$ ([3, Lemma 1.1]).

Lemme 2.5. *Pour $1 \leq i \leq m$, on a*

$$\frac{\det C_{ij}}{\det M(w_1, ..., \hat{w}_j, ..., w_m)} \in \mathfrak{m}_V^{p^{m-1}-p^{i-1}}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\det C_{ij}$ est un polynôme de degré supérieur ou égal à

$$(1+p+\cdots+p^{m-1})-p^{i-1},$$

et que $\det M(w_1,...,\hat{w}_j,...,w_m)$ est homogène de degré $1+p+\cdots+p^{m-2}$. $\square$

Démonstration de la proposition 2.4. On peut supposer que $g\neq 0$, car sinon l'énoncé est évident. Posons $f_1:=g$ et complétons $\{f_1\}$ en une base $\{f_1,\ldots,f_m\}$ de V^*. Soit $\{w_1,\ldots,w_m\}\subset V$ sa base duale, de telle sorte que $\phi=\sum_{j=1}^m w_j f_j$. Par construction on a alors

$$\forall r\geq 0,\quad \phi^{p^r}=\sum_{j=1}^m w_j^{p^r} f_j \tag{4}$$

Soient $\mathbf{e},\mathbf{f}\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V,\mathrm{Sym}(V))^m$ les vecteurs colonnes définis par

$$\mathbf{e}=\begin{pmatrix}\phi^{p^s}\\ \vdots \\ \phi^{p^{s+m-1}}\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}.$$

En prenant successivement $r=s,\ s+1,\ldots,s+m-1$ dans l'équation (4) on obtient l'égalité matricielle suivante :

$$M(w_1^{p^s},\ldots,w_m^{p^s})\cdot\mathbf{f}=\mathbf{e}. \tag{5}$$

Posons maintenant $\Delta_j=\prod_{w\in\mathbb{P}(V)\setminus\mathbb{P}(\ker(f_j))} w$. Par [3, Lemma 1.1(2)], on a

$$\Delta_j^{p^s}=\lambda_j\cdot\frac{\det M(w_1^{p^s},\ldots,w_m^{p^s})}{\det M(w_1^{p^s},\ldots,\hat{w}_j^{p^s},\ldots,w_m^{p^s})}$$

avec $\lambda_j\in\mathbb{F}_p^\times$. En désignant par H la matrice diagonale dont le (j,j)-ème terme est $\lambda_j^{-1}\cdot\det M(w_1^{p^s},\ldots,\hat{w}_j^{p^s},\ldots,w_m^{p^s})$ et par D la matrice diagonale dont le (j,j)-ème terme est Δ_j, on trouve :

$$\underbrace{H^{-1}\cdot{}^t\mathrm{Com}(M(w_1^{p^s},...,w_m^{p^s}))}_{\overset{\mathrm{def}}{=}\widetilde{M}}\cdot M(w_1^{p^s},...,w_m^{p^s})=D^{p^s} \tag{6}$$

et, d'après le lemme 2.5, $\widetilde{M}$ est une matrice dont le (j,i)-ème terme est un élément de $\mathfrak{m}_V^{p^s(p^{m-1}-p^{i-1})}$.

La première ligne de l'égalité de matrices $\widetilde{M}\cdot\mathbf{e}=D^{p^s}\cdot\mathbf{f}$, déduite de (5) et (6), nous permet donc de conclure. $\square$

Soit $(A,\mathfrak{m})$ une $\mathbb{F}_p$-algèbre locale contenant $\mathrm{Sym}(V)$ telle que $\mathfrak{m}_V\subset\mathfrak{m}$. Considérons également la situation plus générale où V_1 est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie et $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V_1,V)$, d'image $V_2\subset V$. On note encore par la lettre φ l'application $\mathbb{F}_p$-linéaire de V_1 dans $\mathrm{Sym}(V)$ obtenue par composition avec l'inclusion canonique $\phi: V\subset\mathrm{Sym}(V)$. Il est plus agréable pour la suite de reformuler la proposition 2.4 sous la forme suivante.

Proposition 2.6. *Fixons $g \in V_2^*$. Soit $m = \dim V_2$. Alors pour $s \geq 0$, on a, dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V_1, A)$,*

$$\Big(\prod_{w \in \mathbb{P}(V_2)\setminus\mathbb{P}(\ker g)} w\Big)^{p^s} \cdot (g \circ \varphi) \in \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{m}^{p^s(p^{m-1}-p^{j-1})}\varphi^{p^{s+j-1}}. \tag{7}$$

Démonstration. Il suffit de composer le résultat de la proposition 2.4, appliqué à V_2, à droite avec φ, et à gauche avec l'inclusion $\mathrm{Sym}(V_2) \subset \mathrm{Sym}(V) \subset A$. □

3 Le résultat principal

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème principal.

Théorème 3.1. *Soient Γ' un sous-groupe ouvert de Γ et I un idéal non nul de $E[[\mathcal{O}_F]]$ stable par Γ'. Alors I est un idéal ouvert de $E[[\mathcal{O}_F]]$.*

Commençons par nous ramener au cas où I est un idéal premier.

Lemme 3.2. *Si l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $E[[\mathcal{O}_F]]$ est le seul idéal premier non nul de $E[[\mathcal{O}_F]]$ stable par un sous-groupe ouvert de Γ, alors le théorème 3.1 est vrai.*

Démonstration. Soit I un idéal non nul de $E[[\mathcal{O}_F]]$ stabilisé par un sous-groupe ouvert de Γ. L'anneau $E[[\mathcal{O}_F]]$ étant noethérien, l'ensemble $\mathrm{Ass}(E[[\mathcal{O}_F]]/I)$ ([7, §1]) des idéaux premiers associés à I est fini et ses éléments sont les idéaux premiers de la forme

$$(I : (s)), \quad s \in E[[\mathcal{O}_F]].$$

On vérifie directement que si $\gamma \in \Gamma'$ et si $(I : (s))$ est premier, alors $(I : \gamma(s))$ l'est aussi. Autrement dit, l'ensemble $\mathrm{Ass}(E[[\mathcal{O}_F]]/I)$ est stable par Γ'. Comme $\mathrm{Ass}(E[[\mathcal{O}_F]]/I)$ est fini, il existe un sous-groupe ouvert Γ'' de Γ' qui fixe tous les éléments de $\mathrm{Ass}(E[[\mathcal{O}_F]]/I)$. Ainsi $\mathrm{Ass}(E[[\mathcal{O}_F]]/I) = \{\mathfrak{m}\}$. Comme $\sqrt{I}$ peut s'écrire comme une intersection d'éléments de $\mathrm{Ass}(E[[\mathcal{O}_F]]/I)$, on a $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ et donc I est ouvert dans $E[[\mathcal{O}_F]]$. □

Posons $V := \bigoplus_{0 \leq i \leq e-1, 0 \leq k \leq f-1} \mathbb{F}_p X_{i,k}$, c'est un sous-$\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de $E[[\mathcal{O}_F]]$. D'après l'isomorphisme (1), on a $V \otimes_{\mathbb{F}_p} E \simeq \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. On peut ainsi identifier V à un $\mathbb{F}_p$-sous-espace de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, ce que nous ferons dans la suite. Posons enfin $Y_i = \bigoplus_{k=0}^{f-1} \mathbb{F}_p X_{i,k}$ de sorte que $V = \bigoplus_{i=0}^{e-1} Y_i$.

Définition 3.3. *On définit un morphisme $\rho : \mathcal{O}_F/p\mathcal{O}_F \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}_p}(V)$ comme suit : si $\overline{x} \in \mathcal{O}_F/p\mathcal{O}_F$ et si $x \in \mathcal{O}_F$ est un relèvement de $\overline{x}$, alors*

$$\rho(\overline{x})(X_{i,k}) := \varepsilon(x \cdot \varpi^i[\lambda^k]) - 1 \mod \mathfrak{m}^2.$$

Remarque 3.4. *Si on pose $\mathfrak{g} = \mathcal{O}_F/p\mathcal{O}_F$, il s'agit de l'action de $\mathfrak{g}$ sur V décrite dans* [2, §4.2]. *Comme notre cas est très particulier, nous n'utilisons pas le formalisme de cet article.*

Puisque $\varepsilon(x+y)-1 \equiv (\varepsilon(x)-1)+(\varepsilon(y)-1) \mod \mathfrak{m}^2$, et que $\varepsilon(py)-1 = (\varepsilon(y)-1)^p \in \mathfrak{m}^p$ pour tous $x, y \in \mathcal{O}_F$, on voit que la définition ci-dessus ne dépend pas du choix du relèvement x et que ρ est bien un morphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_p$. On peut identifier $\mathcal{O}_F/p\mathcal{O}_F$ avec $k_F[\varpi]/(\varpi^e) = \bigoplus_{i=0}^{e-1} k_F\varpi^i$.

Lemme 3.5. *Fixons $i \in \{0, ..., e-1\}$.*

(i) Soit $\overline{x} \in k_F\varpi^i$. Alors $\rho(\overline{x})(Y_j) = \begin{cases} Y_{i+j} & \text{si } i+j \leq e-1 \\ 0 & \text{si } i+j \geq e. \end{cases}$

(ii) Soient $0 \leq j \leq e-1-i$ et $g \in Y_{i+j}^*$ non nul. Alors l'application de $k_F\varpi^i$ dans Y_j^* donnée par $\overline{x} \mapsto g \circ \rho(\overline{x})$ est une bijection.

Démonstration. L'application $x \mapsto (\epsilon(x)-1)+\mathfrak{m}^2$ est un isomorphisme de groupes de $\mathcal{O}_F/p\mathcal{O}_F$ sur V et l'action de $\rho(\overline{x})$ sur V induit une action sur $\mathcal{O}_F/p\mathcal{O}_F$ qui est donnée par la multiplication par $\overline{x}$. Les deux énoncés s'en déduisent. □

Lemme 3.6. *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $E[[\mathcal{O}_F]]$. Pour que $\mathfrak{p}$ soit l'idéal maximal de $E[[\mathcal{O}_F]]$, il faut et il suffit que $\sqrt{\mathrm{gr}(\mathfrak{p})}$ soit l'idéal maximal de $\mathrm{gr}(E[[\mathcal{O}_F]]) \cong E[\sigma(X_{i,k})]$ engendré par les $\sigma(X_{i,k})$, $0 \leq i \leq e-1, 0 \leq k \leq f-1$.*

Démonstration. La nécessité est immédiate. Prouvons la suffisance. Si $\mathrm{gr}(\mathfrak{p})$ contient une puissance de $\mathrm{gr}(\mathfrak{m})$, on a $\mathfrak{p}+\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$ pour n assez grand. En utilisant le lemme de Nakayama, on montre qu'alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}^n$ puis $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ vu que $\mathfrak{p}$ est premier. □

Considérons un idéal premier $\mathfrak{p}$ non nul qui n'est pas maximal. Le lemme 3.6 implique que $\sqrt{\mathrm{gr}(\mathfrak{p})}$ ne contient pas tous les $\sigma(X_{i,k})$. Il existe donc un indice $i_0 \in \{0, ..., e-1\}$ tel que

(a) $\sigma(X_{j,k}) \in \sqrt{\mathrm{gr}(\mathfrak{p})}$ pour tout $j > i_0$ et tout $0 \leq k \leq f-1$;

(b) il existe $k' \in \{0, ..., f-1\}$ tel que $\sigma(X_{i_0,k'}) \notin \sqrt{\mathrm{gr}(\mathfrak{p})}$.

Dans la suite, on voit $\rho(\bar{x})$ comme un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, E[[\mathcal{O}_F]])$ via l'inclusion $V \hookrightarrow E[[\mathcal{O}_F]]$.

Proposition 3.7. *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $E[[\mathcal{O}_F]]$ stable sous l'action d'un sous-groupe ouvert $\Gamma' \subset \Gamma$ et vérifiant les conditions (a) et (b) ci-dessus. Soit $F \in \mathfrak{p}$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout r suffisamment grand l'on ait*

$$\forall \ \ \overline{x} \in k_F\varpi^{i_0}, \quad \sum_{k=0}^{f-1} \rho(\overline{x})(X_{0,k})^{p^r} \cdot (1+X_{0,k})\frac{\partial F}{\partial X_{0,k}} \in \mathfrak{p}+\mathfrak{m}^{p^r(1+\eta)}. \tag{8}$$

Démonstration. Soit $\overline{x} \in k_F\varpi^{i_0}$. En choisissant un relèvement $x \in \mathcal{O}_F$ de $\overline{x}$, on a par définition, pour tout $0 \leq i \leq e-1, 0 \leq k \leq f-1$:

$$\rho(\overline{x})(X_{i,k})^{p^r} \equiv \varepsilon(p^r x \cdot \varpi^i[\lambda^k]) - 1 \mod \mathfrak{m}^{2p^r}.$$

Posons $\gamma = 1+p^r x$ avec r suffisamment grand pour que $\gamma \in \Gamma'$. Par définition de l'action de γ sur $\mathcal{O}_F$, on obtient

$$\gamma(X_{i,k}) = \varepsilon((1+p^r x)\varpi^i[\lambda^k]) - 1 \equiv X_{i,k} + (1+X_{i,k}) \cdot \rho(\overline{x})(X_{i,k})^{p^r} \mod \mathfrak{m}^{2p^r}.$$

Soit maintenant $F \in \mathfrak{p}$. En écrivant le développement de Taylor à l'ordre 1 de $\gamma(F) = F(\gamma(X_{i,k}))$, on voit que

$$\gamma(F) - F - \sum_{i,k} \rho(\overline{x})(X_{i,k})^{p^r} \cdot (1 + X_{i,k}) \frac{\partial F}{\partial X_{i,k}} \in \mathfrak{m}^{2p^r}.$$

Comme $\mathfrak{p}$ est stable par Γ', on a $\gamma(F) \in \mathfrak{p}$ et donc

$$\sum_{i,k} \rho(\overline{x})(X_{i,k})^{p^r} \cdot (1 + X_{i,k}) \frac{\partial F}{\partial X_{i,k}} \in \mathfrak{p} + \mathfrak{m}^{2p^r}.$$

Pour $\overline{x} \in k_F \varpi^{i_0}$, le lemme 3.5 implique que

$$\rho(\overline{x})(Y_0) \subseteq Y_{i_0}, \quad \ldots, \quad \rho(\overline{x})(Y_{e-1-i_0}) \subseteq Y_{e-1} \quad \text{et} \quad \forall i \geq e - i_0, \quad \rho(\overline{x})(Y_i) = 0. \tag{9}$$

Par ailleurs, l'hypothèse sur i_0 et le lemme 2.2 (i) montrent que $\delta(X_{j,k}) = +\infty$ pour $j > i_0$ et $0 \leq k \leq f-1$. Autrement dit, $\delta(y) = +\infty$ pour $y \in Y_j$, $j > i_0$. Combinées à (9), ces égalités nous donnent $\delta(\rho(\overline{x})(X_{i,k})) = +\infty$ pour tout $1 \leq i \leq e - 1 - i_0$, $0 \leq k \leq f-1$. Comme $\deg(\rho(\overline{x})(X_{i,k})^{p^r}) \geq p^r$ on déduit du lemme 2.2(iii) l'existence de $\eta > 0$ tel que, pour tous $1 \leq i \leq e-1-i_0$, $0 \leq k \leq f-1$ et r suffisamment grand,

$$\rho(\overline{x})(X_{i,k})^{p^r} \cdot (1 + X_{i,k}) \frac{\partial F}{\partial X_{i,k}} \in \mathfrak{p} + \mathfrak{m}^{(1+\eta)p^r}.$$

Ceci permet de conclure. □

Le corollaire qui suit est le résultat clé pour démontrer le théorème principal. Il utilise l'estimation établie dans la proposition 2.6.

Corollaire 3.8. *Conservons les notations de la proposition 3.7. Soient $g \in Y_{i_0}^*$ une forme linéaire non nulle et $\overline{x}$ un élément de $k_F \varpi^{i_0} \backslash \{0\}$. Posons*

$$P_{g,\overline{x}} = \sum_{k=0}^{f-1} (g \circ \rho(\overline{x}))(X_{0,k}) \cdot (1 + X_{0,k}) \frac{\partial F}{\partial X_{0,k}}.$$

Alors, en notant $U_g = \prod_{w \in \mathbb{P}(Y_{i_0}) \backslash \mathbb{P}(\ker(g))} w$, on a $\delta(U_g, P_{g,\overline{x}}) = +\infty$.

Démonstration. D'après la définition de la fonction δ (cf. §2.1), on peut supposer que $U_g, P_{g,\overline{x}} \notin \mathfrak{p}$. Il suffit alors de montrer que

$$\sup_{r \geq 0} \left\{ \nu(U_g^{p^r} P_{g,\overline{x}}) - \deg(U_g^{p^r} P_{g,\overline{x}}) \right\} = +\infty.$$

Notons d'abord que U_g est un polynôme homogène de degré p^{f-1}, de telle sorte que

$$\deg(U_g^{p^r} P_{g,\overline{x}}) = p^{r+f-1} + \deg(P_{g,\overline{x}}).$$

De plus, la proposition 2.6 appliquée à $\varphi = \rho(\overline{x})|_{Y_0}$, $V_1 = Y_0$ et $V_2 = Y_{i_0}$, nous donne pour tout $r \geq 0$

$$U_g^{p^r} \cdot (g \circ \rho(\overline{x})) = \sum_{j=1}^{f} u_{j,r} \cdot \rho(\overline{x})^{p^{r+j-1}}$$

pour certains $u_{j,r} \in \mathfrak{m}^{p^r(p^{f-1}-p^{j-1})}$, et en appliquant cette formule à $X_{0,k}$ on obtient

$$U_g^{p^r} \cdot (g \circ \rho(\overline{x}))(X_{0,k}) = \sum_{j=1}^{f} u_{j,r} \cdot \rho(\overline{x})(X_{0,k})^{p^{r+j-1}}.$$

En notant que les $u_{j,r}$ sont indépendants de k, cela nous permet d'écrire au moyen de l'inclusion (8) :

$$\begin{aligned}
U_g^{p^r} P_{g,\overline{x}} &= \sum_{k=0}^{f-1} \Big(\sum_{j=1}^{f} u_{j,r} \cdot \rho(\overline{x})(X_{0,k})^{p^{r+j-1}} \Big) (1 + X_{0,k}) \frac{\partial F}{\partial X_{0,k}} \\
&= \sum_{j=1}^{f} u_{j,r} \Big(\sum_{k=0}^{f-1} \rho(\overline{x})(X_{0,k})^{p^{r+j-1}} (1 + X_{0,k}) \frac{\partial F}{\partial X_{0,k}} \Big) \\
&\in \sum_{j=1}^{f} \mathfrak{m}^{p^r(p^{f-1}-p^{j-1})} \cdot (\mathfrak{p} + \mathfrak{m}^{p^{r+j-1}(1+\eta)}) \\
&\subset \mathfrak{p} + \mathfrak{m}^{p^r(p^{f-1}+\eta)}
\end{aligned}$$

pour tout r suffisamment grand. Cela entraîne que (pour $r \gg 0$)

$$\nu(U_g^{p^r} P_{g,\overline{x}}) \geq p^{r+f-1} + \eta p^r$$

et donc $\delta(U_g, P_{g,\overline{x}}) = +\infty$ puisque $\eta > 0$. □

Démonstration du théorème 3.1. D'après le lemme 3.2 il suffit de montrer que si $\mathfrak{p}$ est un idéal non nul de $E[[\mathcal{O}_F]]$ stable par un sous-groupe ouvert de Γ alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$. Soit $\mathfrak{p} \subset E[[\mathcal{O}_F]]$ un idéal premier stable par un sous-groupe ouvert de Γ. Supposons par l'absurde que $\mathfrak{p}$ n'est ni nul, ni maximal, et soit i_0 l'indice satisfaisant les conditions (a) et (b) comme précédemment. Il existe $g \in Y_{i_0}^*$ non nul tel que $\sigma(U_g) \notin \sqrt{\mathrm{gr}(\mathfrak{p})}$. En effet, en appliquant le théorème des zéros de Hilbert, on voit que l'idéal gradué de $E[\sigma(X_{i_0,0}), \ldots, \sigma(X_{i_0,f-1})]$ engendré par tous les $\sigma(U_g)$ est un idéal ouvert de $E[\sigma(X_{i_0,0}), \ldots, \sigma(X_{i_0,f-1})]$. La condition (b) implique donc l'existence d'un tel g.

D'après le lemme 2.2 (i), on a alors $\delta(U_g) = 0$. Le corollaire 3.8 et le lemme 2.2(ii) impliquent donc

$$\forall \overline{x} \in k_F \varpi^{i_0}, \quad \sum_{k=0}^{f-1} (g \circ \rho(\overline{x}))(X_{0,k}) \cdot (1 + X_{0,k}) \frac{\partial F}{\partial X_{0,k}} \in \mathfrak{p}.$$

Le lemme 3.5 assure l'existence de $\overline{x}_k \in k_F \varpi^{i_0}$ tel que $g \circ \rho(\overline{x}_k) = X_{0,k}^*$, où $\{X_{0,k}^*, 0 \leq k \leq f-1\}$ désigne la base duale de Y_0. On en déduit que

$$\forall 0 \leq k \leq f-1, \quad (1 + X_{0,k}) \frac{\partial F}{\partial X_{0,k}} \in \mathfrak{p},$$

et, puisque $1 + X_{0,k}$ est inversible dans $E[[\mathcal{O}_F]]$, que $\frac{\partial F}{\partial X_{0,k}} \in \mathfrak{p}$. Ceci étant vrai pour tout $0 \leq k \leq f-1$, le lemme 2.3 implique que $\mathfrak{p}$ est contrôlé par $\varpi \mathcal{O}_F$.

Comme $E[[\mathcal{O}_F]]$ est une $E[[\varpi\mathcal{O}_F]]$-algèbre finie, l'idéal $\mathfrak{p} \cap E[[\varpi\mathcal{O}_F]]$ est un idéal premier de $E[[\varpi\mathcal{O}_F]]$ qui n'est ni nul ni maximal. La multiplication par ϖ induit un isomorphisme Γ-équivariant de pro-p-groupes $\mathcal{O}_F \cong \varpi\mathcal{O}_F$. En itérant l'argument précédent, on voit qu'en fait $\mathfrak{p}$ est contrôlé par tous les sous-groupes $\varpi^n\mathcal{O}_F$ pour $n \in \mathbb{N}$. Comme $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \varpi^n\mathcal{O}_F = \{0\}$, on obtient $\mathfrak{p} = 0$. □

Démonstration du théorème 1.1. C'est une simple relecture du théorème 3.1 en tenant compte de l'isomorphisme $\mathcal{O}_F \simeq U$. □

4 Applications

Corollaire 4.1. *Soit (π, ρ) une représentation lisse irréductible de $G = \mathrm{GL}_2(F)$ sur un E-espace vectoriel de dimension infinie. Alors l'action de $E[[U]]$ sur π est fidèle.*

Démonstration. Soit I le noyau de $E[[U]] \to \mathrm{End}_E(\pi)$. C'est un idéal de $E[[U]]$ stable sous l'action de T_0. D'après le théorème 1.1, I est ouvert ou nul. Supposons par l'absurde qu'il soit ouvert. Alors il existe un sous-groupe ouvert $U' \subset U$ agissant trivialement sur π. Soit $N \subset G$ le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures. Ce groupe N est une union de conjugués de U'. Ainsi le noyau de $\rho :\ G \to \mathrm{Aut}(\pi)$ contient U', donc N. Or un sous-groupe distingué de G contenant N contient $\mathrm{SL}_2(F)$. On peut voir π comme une représentation lisse irréductible du groupe $\mathrm{GL}_2(F)/\mathrm{SL}_2(F)$, qui est isomorphe à $F^\times$. Pour conclure il suffit de montrer qu'une telle représentation est toujours de dimension finie. Comme $\mathcal{O}_F^\times$ est le produit direct d'un pro-p-groupe et d'un groupe fini d'ordre premier à p, il existe un élément non nul $v \in \pi$ tel que $\mathcal{O}_F^\times$ agisse sur v par un caractère. Cela implique que, par irréductibilité de π et par la décomposition $F^\times = \mathcal{O}_F^\times \times \varpi^{\mathbb{Z}}$, π devient un $E[\varpi^{\mathbb{Z}}]$-module simple engendré par v. Or l'anneau $E[\varpi^{\mathbb{Z}}]$ est isomorphe à $E[X, \frac{1}{X}]$ en identifiant ϖ avec X. L'énoncé découle alors du fait que, par le théorème des zéros de Hilbert, tout module simple sur $E[X, \frac{1}{X}]$ est de dimension finie sur E. En effet, un module simple non nul sur un anneau n'est autre qu'un quotient de cet anneau par un idéal maximal. □

Corollaire 4.2. *Soit M un $E[[U]]$-module de type fini muni d'une action semi-linéaire de T_0 et soit $\mathrm{Ass}(M)$ l'ensemble des idéaux premiers associés à M ([7, §1]). Alors $\mathrm{Ass}(M) \subset \{\{0\}, \mathfrak{m}\}$. Si de plus M est de torsion, alors $\mathrm{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{m}\}$ et M est de longueur finie.*

Démonstration. Comme dans la preuve du lemme 3.2, on voit que $\mathrm{Ass}(M)$ est fini et ses éléments sont tous stables par un certain sous-groupe ouvert de T_0. Le premier énoncé s'en déduit. Pour le deuxième, il suffit de remarquer que $\{0\} \notin \mathrm{Ass}(M)$ lorsque M est de torsion. □

Corollaire 4.3. *Soit M un $E[[U]]$-module de type fini muni d'une action semi-linéaire de T_0. Si on note $\mathrm{T}(M)$ le sous-$E[[U]]$-module de torsion de M, $\mathrm{T}(M)$ est de longueur finie sur $E[[U]]$. De plus il existe alors un $E[[U]]$-module de type fini réflexif M_1 contenant $M/\mathrm{T}(M)$ tel que le quotient de M_1 par $M/\mathrm{T}(M)$ soit de longueur finie. Si $[F : \mathbb{Q}_p] \leq 2$, on peut même supposer que M_1 est un $E[[U]]$-module libre.*

Démonstration. On note $M^* = \mathrm{Hom}_{E[[U]]}(M, E[[U]])$ le dual de M. On le munit d'une action de T_0 de la façon suivante. Si $\gamma \in T_0$, $f \in M^*$ et $x \in M$, on pose $(\gamma \cdot f)(x) =$

$\gamma f(\gamma^{-1}x)$. L'application canonique de $i : M \to M^{**}$ est alors T_0-équivariante. De plus, si K désigne le corps des fractions de A, l'application $i \otimes_A K$ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels de dimension finie. On en conclut que $\mathrm{Ker}(i)$ et $\mathrm{Coker}(i)$ sont des $E[[U]]$-modules de type fini, de torsion et stables par T_0. Ils sont donc de longueur finie d'après le corollaire 4.2. Comme M^{**} est sans torsion, on a en fait $\mathrm{Ker}(i) = \mathrm{T}(M)$, ceci permet de conclure en prenant $M_1 = M^{**}$.
Si $\dim(E[[U]]) = 1$, $E[[U]]$ est un anneau de valuation discrète, tout $E[[U]]$-module de type fini sans torsion est donc libre. D'après la proposition 2 de [13], tout module réflexif de type fini sur un anneau local noethérien régulier de dimension 2 est libre, donc M^{**} est libre si $\dim(E[[U]]) = 2$. □

On peut se demander à quel point, lorsque $[F : \mathbb{Q}_p] > 2$, un $E[[U]]$-module réflexif de type fini muni d'une action semi-linéaire de T_0 est éloigné d'un $E[[U]]$-module libre. Nous ne connaissons pas d'exemple de tel module qui ne soit pas libre. Le mieux que l'on puisse dire sur un tel module est contenu dans la proposition suivante.

Proposition 4.4. *Soit M un $E[[U]]$-module réflexif de type fini muni d'une action semi-linéaire de T_0. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ de $E[[U]]$, le $E[[U]]_{\mathfrak{p}}$-module $M_{\mathfrak{p}}$ est libre.*

Démonstration. Posons $A = E[[U]]$. Pour $i \geq 1$, notons $\otimes_A^i M := M \otimes_A \cdots \otimes_A M$ le A-module produit tensoriel de i copies de M. Ce sont des A-modules de type fini munis naturellement d'une action semi-linéaire de T_0. Soit $\mathrm{T}(\otimes_A^i M)$ le sous-module de torsion de $\otimes_A^i M$; il est clairement stable par T_0. D'après le corollaire 4.2, on voit que $\mathrm{Ass}\big(\mathrm{T}(\otimes_A^i M)\big) \subset \{\mathfrak{m}\}$, d'où $\big(\mathrm{T}(\otimes_A^i M)\big)_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ par [7, §3, corollaire 1]. On déduit alors des isomorphismes naturels (avec les notations évidentes)

$$\big(\mathrm{T}(\otimes_A^i M)\big)_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{T}\big((\otimes_A^i M)_{\mathfrak{p}}\big) \cong \mathrm{T}(\otimes_{A_{\mathfrak{p}}}^i M_{\mathfrak{p}})$$

que $\otimes_{A_{\mathfrak{p}}}^i M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module sans torsion pour tout $i \geq 1$. Comme $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local régulier non ramifié puisque A l'est (car de caractéristique p, voir [5, p.634]), le théorème 3.2 de [5] nous permet de conclure. □

Références

[1] K. Ardakov, *Prime ideals in nilpotent Iwasawa algebras*, à paraître à Inv. Math.

[2] K. Ardakov, S. J. Wadsley, *Γ-invariant ideals in Iwasawa algebras*, J. Pure Appl. Algebra 213 (2009), 1852–1864.

[3] K. Ardakov, F. Wei, J.J. Zhang, *Non existence of reflexive ideals in Iwasawa algebras of Chevalley type*, J. Algebra 320 (2008), 259-275.

[4] K. Ardakov, F. Wei, J.J. Zhang, *Reflexive ideals in Iwasawa algebras*, Adv. Math. 218 (2008), 865-901.

[5] M. Auslander, *Modules over unramified regular local rings*, Illinois J. Math. 5 (1961), 631-647.

[6] L. Barthel, R. Livné, *Irreducible modular representations of* GL_2 *of a local field*, Duke Math. J. 75 (1994), 261–292.

[7] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algèbre commutative, chapitre 4 : Idéaux premiers associés et décomposition primaire*, Springer-Verlag, 2006.

[8] C. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *I, Compositio Math. 138 (2003), 165–188.*

[9] C. Breuil, V. Paškūnas, *Towards a modulo p Langlands correspondence for* GL_2, à paraître à Memoirs of Amer. Math. Soc.

[10] J.D. Dixon, M.P.F. Du Sautoy, A. Mann, D. Segal, *Analytic pro-p groups*, 2nd edition, Cambridge University Press, 1999.

[11] Y. Hu, *Sur quelques représentations supersingulières de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^f})$, J. Algebra 324 (2010), 1577-1615.

[12] M. Nagata, *Local rings*, Tracts in Pure and Applied Mathematics 13, Interscience, 1962.

[13] P. Samuel, *Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs*, Bull. Soc. Math. France 92 (1964), 237–249.

[14] B. Schraen, *Sur la présentation des représentations supersingulières de* $\mathrm{GL2}(F)$, prépublication 2012.

IRMAR - UMR CNRS 6625
Campus Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France
Adresse e-mail : yongquan.hu@univ-rennes1.fr

Laboratoire de Mathématiques de Montpellier
UMR CNRS 5149
Place Eugène Bataillon, cc 51
F–34000 Montpellier Cedex, France
Adresse e-mail : Stefano.Morra@univ-montp2.fr

Laboratoire de Mathématiques de Versailles
UMR CNRS 8100
45, avenue des États Unis - Bâtiment Fermat
F–78035 Versailles Cedex, France
Adresse e-mail : benjamin.schraen@math.uvsq.fr