ÉCOLE CENTRALE LYON

Année 2022-2023

Analyse numérique – TD 1

Analyse numérique matricielle

À préparer avant la séance de TD

Exercice 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice symétrique définie positive ; on note ses valeurs propres $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_d$. On considère la méthode itérative, pour $\alpha > 0$,

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - \alpha(AX^{(n)} - b), \qquad X^{(0)} \in \mathbb{R}^d \text{ donné.} \tag{1}$$

1. Mettre la méthode sous la forme $X^{(n+1)} = BX^{(n)} + c$ où l'on précisera la matrice B et le vecteur c.
2. On suppose que $\alpha\lambda_d < 2$. Montrer que toutes les valeurs propres de B appartiennent à l'intervalle $]-1, 1[$.
3. En déduire que, sous la condition $\alpha\lambda_d < 2$, la suite $\left(X^{(n)}\right)$ converge. Quelle est sa limite ?

*4. Pour quelle valeur de α la convergence est-elle la plus rapide ?

Exercice 2. Programmer la méthode (1) avec `matlab`. La tester pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On prendra $b = (1, 1, \ldots, 1)^\mathsf{T}$, $X^{(0)} = (0, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$ et les paramètres $d = 10$, $\alpha = 10^{-2}$. Vérifier que la valeur de la septième composante de $X^{(10000)}$ vaut 13.9957.

À travailler pendant la séance de TD

Exercice 3. On considère la matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{d-1} \\ & & b_{d-1} & a_d \end{pmatrix}$$

On suppose que A est inversible et qu'elle admet une décomposition LU sous la forme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \ell_1 & \ddots & \\ & \ell_{d-1} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & \\ & \ddots & v_{d-1} \\ & & u_d \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les relations permettant de construire (u_i),(v_i), (ℓ_i) en fonction de (a_i), (b_i), (c_i).
2. En déduire un algorithme de calcul de la décomposition LU de la matrice A. Quel est son coût ? Comment se compare-t-il au coût dans le cas général ?

Exercice 4.

1. Montrer le théorème de Gershgorin : si λ est une valeur propre de $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, alors
$$\exists i \in \{1,\dots,d\}, \quad |\lambda - a_{ii}| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$
On considérera un vecteur propre x associé à λ et i tel que $|x_i| = \max_j |x_j|$.
2. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$
En utilisant le théorème de Gershgorin, montrer que A est inversible.

*3. Soit $D \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice diagonale et $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice quelconque. Montrer que, pour toute valeur propre λ de M, il existe un indice i tel que
$$|\lambda - D_{ii}| \leqslant |||M - D|||_\infty.$$

*4. Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ diagonalisable (on note P une matrice de passage vers une base de diagonalisation), et $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice quelconque. Déduire de la question précédente que, pour toute valeur propre λ de B, il existe une valeur propre μ de A telle que $|\lambda - \mu| \leqslant \mathrm{cond}_\infty(P)|||A - B|||_\infty$.

Simulation avec `Matlab`

Exercice 5.

1. Programmer la méthode de la puissance pour le calcul d'un vecteur propre associé à la valeur propre de plus grand module d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. La tester sur la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
On fera plusieurs tests à partir de vecteur initiaux choisis aléatoirement.
2. On considère maintenant la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (a) La méthode de la puissance fonctionne-t-elle avec la matrice B ? Pourquoi ?
   (b) Que fournit la méthode de la puissance appliquée à B^2 ?
3. On considère le vecteur $v_1 = (-1, \sqrt{2}, -1)^\mathsf{T}$ et on pose $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}$. Programmer la méthode de la puissance appliquée à la matrice
$$A_1 = A - \lambda_1 \frac{v_1 v_1^\mathsf{T}}{v_1^\mathsf{T} v_1}.$$
Vers quelle valeur propre de A converge-t-elle ?

*4. Expliquer le phénomène. *On pourra relier les valeurs propres de A_1 à celles de A.*

Année 2022-2023

Analyse numérique – TD 2

Intégration numérique

À préparer avant la séance de TD

Exercice 1. On considère la formule d'intégration numérique composée suivante :

$$I = \int_{\pi}^{\pi+3} f(x)\,\mathrm{d}x \simeq I_N = h \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{1}{4} f(\pi + ih) + \frac{3}{4} f\left(\pi + ih + \frac{2h}{3}\right)\right],$$

avec $h = 3/N$.

1. Vérifier qu'il s'agit d'une méthode composée à partir d'un modèle élémentaire (le préciser).
2. En déduire une estimation de l'erreur $|I - I_N|$ en fonction de h, et des dérivées de f (supposée aussi régulière que nécessaire).

Exercice 2. Programmer avec `matlab` la méthode des rectangles à droite pour l'approximation de

$$I = \int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}(1 + x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{40}{9}.$$

Reprendre les mêmes calculs avec l'intégrale obtenue après changement de variable $x = u^4$:

$$I = 4\int_0^1 (1 + u^8)\,\mathrm{d}u.$$

Vérifier que les approximations obtenues à l'aide les deux méthodes pour $N = 1000$ valent respectivement 3.8335 et 4.4464.

À travailler pendant la séance de TD

Exercice 3. On souhaite calculer numériquement l'intégrale (pour laquelle aucune formule explicite n'existe) :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Pour ce faire, on fixe $R > 1$ et on approche I par la méthode des rectangles obtenue sur l'intervalle $[1, R]$:

$$I \simeq I_R^N = \frac{R-1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i),$$

où on a posé $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{x}$ et $x_i = 1 + \dfrac{i(R-1)}{N}$.

1. On pose

$$I_R = \int_1^R \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que

$$|I - I_R| \leqslant \frac{e^{-R}}{R}.$$

2. Montrer que
$$\left|I_R - I_R^N\right| \leqslant \frac{(R-1)^2}{eN}.$$
3. On fixe $\varepsilon > 0$. Proposer un choix de valeurs pour R et N afin de garantir
$$\left|I - I_R^N\right| \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 4. On considère le modèle élémentaire
$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t \simeq \frac{1}{8}\left[\varphi(0) + 3\varphi(\tfrac{1}{3}) + 3\varphi(\tfrac{2}{3}) + \varphi(1)\right].$$
Écrire la méthode composée correspondante pour le calcul de l'intégrale
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Combien d'évaluations de la fonction f nécessite-t-elle ? Donner une estimation de l'erreur commise par la méthode composée.

Simulation avec `Matlab`

Exercice 5. On considère un modèle de quadrature élémentaire de la forme
$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t \simeq \sum_{q=0}^{k} w_q \varphi(t_q),$$
avec $t_q = q/k$. Cette formule est exacte pour les polynômes de degré au plus k si et seulement si
$$\forall i = 0, 1, \dots k, \quad \sum_{q=0}^{k} w_q t_q^i = \frac{1}{i+1}.$$

1. Programmer la résolution de ce système linéaire.
2. Vérifier que le cas $k = 3$ correspond à la méthode de l'exercice 4.
3. Programmer la méthode composée correspondant à $k = 3$, et illustrer numériquement son ordre de convergence.

ÉCOLE CENTRALE LYON

Année 2022-2023

Analyse numérique – TD 3

Optimisation numérique

À préparer avant la séance de TD

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = 1 + x^2 + |y|^3 + z^2 + \sin z.$$

1. Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et qu'elle admet un unique point de minimum global.
2. Expliciter les itérations de la méthode de Newton pour la minimisation de f.
3. Mettre en œuvre la méthode précédente avec `Matlab`.
4. Vérifier que les approximations du point de minimum et du minimum de f obtenues avec 20 itérations de la méthode de Newton en partant du vecteur $(1, 1, 1)$ valent respectivement $[\mathtt{0}; \mathtt{0}; -\mathtt{0.4502}]$ et 0.7675.

*5. Observer la vitesse de convergence de chaque composante. Commenter.

À travailler pendant la séance de TD

Exercice 2. On considère la fonction $f(x, y) = 1 + x^2 + |y|^3$ et la suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par la méthode du gradient à pas fixe

$$\begin{cases} (x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) - \rho \nabla f(x_n, y_n), \\ \qquad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

avec $\rho > 0$.

1. Montrer que $x_n = (1 - 2\rho)^n x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On suppose $y_0 > 0$ et $\rho < \min\left(\frac{1}{3y_0}, 1\right)$. Montrer que (x_n, y_n) tend vers $(0, 0)$.
   On montrera que la suite (y_n) est strictement positive et décroissante.
3. Montrer par l'absurde que la convergence de (y_n) n'est pas géométrique. Quelle hypothèse sur f manque-t-il pour que le théorème du cours sur la vitesse de convergence fonctionne ?

Exercice 3. On considère le problème d'optimisation

$$\max_{x\in\mathcal{B}} (Ax|x)$$

où A est une matrice symétrique réelle définie positive et $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 \leqslant 1\}$.

1. Donner l'expression de la projection sur $\mathcal{B}$.
2. Écrire l'itération donnée par la méthode du gradient projeté appliquée à ce problème.
3. On suppose $\|x^{(0)}\|_2 \geqslant 1$. Quelle méthode vue au chapitre 1 reconnaît-on ?

*4. Quelle est est la limite de $(Ax^{(n)}|x^{(n)})$?

Exercice 4. Nous allons résoudre le problème du cable pesant grâce à la méthode du gradient pénalisé. Le cable de longueur $L = 2$ est fixés à ses extrémités aux points $(0, 1)$ et en $(1, 3/2)$. Il est discrétisé par N points libres $(x_1, y_1), \dots (x_N, y_N)$ du plan. On définit le vecteur des inconnus

$$\mathbf{u} := (x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N)^T \in \mathbb{R}^{2N}.$$

La solution d'équilibre recherchée est celle qui minimise l'énergie potentielle $E(\mathbf{u})$ du cable sous les contraintes de longueur et d'attache au extrémités. Mathématiquement, on cherche $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2N}$ solution de

$$\min_{\mathbf{u} \in K} E(\mathbf{u}) \qquad \text{avec} \qquad E(\mathbf{u}) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N} y_i,$$

et $K = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2N}, \varphi_i(\mathbf{u}) = 0,\ i = 1, \dots, N+1\}$. Les contraintes de longueur de chaque segment de cable sont données par $\varphi_i(\mathbf{u}) = \ell_i(\mathbf{u}) - h$ avec

$$\ell_i(\mathbf{u}) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}, \qquad \forall i \in \{1, \dots, N+1\}$$

et $h = L/(N+1)$. On utilise les conventions $(x_0, y_0) = (0, 1)$ et $(x_{N+1}, y_{N+1}) = (1, 3/2)$. Afin de pénaliser les contraintes définissant K, on utilise la fonction $\beta(\mathbf{u}) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{N+1} \varphi_i^2(\mathbf{u})$.

1. Écrire une fonction `[valE,gradE] = energie(u)` qui renvoie la valeur de $E(\mathbf{u})$ ainsi que le gradient de E en $\mathbf{u}$.
2. Écrire une fonction `[valP,gradP] = penalisation(u)` qui renvoie la valeur de $\beta(\mathbf{u})$ ainsi que le gradient de β en $\mathbf{u}$. *Les dérivés partielles de β sont données par*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \beta}{\partial x_i}(\mathbf{u}) = \left(1 - \dfrac{h}{\ell_i}\right)(x_i - x_{i-1}) + \left(1 - \dfrac{h}{\ell_{i+1}}\right)(x_i - x_{i+1}) \\ \dfrac{\partial \beta}{\partial y_i}(\mathbf{u}) = \left(1 - \dfrac{h}{\ell_i}\right)(y_i - y_{i-1}) + \left(1 - \dfrac{h}{\ell_{i+1}}\right)(y_i - y_{i+1}) \end{cases}$$

   avec $\ell_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ pour tout i.
3. Mettre en œuvre la méthode du gradient à pas fixe pour résoudre le problème pénalisé

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2N}} E(\mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(\mathbf{u}). \tag{2}$$

   On prendra pour $\mathbf{u}_0$ un vecteur aléatoire, $N = 20$ et on testera $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 10^{-2}$ et $\varepsilon = 10^{-3}$. On prendra toujours $\rho = \varepsilon/3$. L'algorithme s'arrêtera dès que $\left\|\nabla E(\mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\beta(\mathbf{u})\right\|_\infty \leq 10^{-3}$. À la fin de l'algorithme, on récupérera la position `(x,y)` *du cable on on l'affichera avec la commande* `plot(x,y,'-o')`.
4. Comment la longueur totale du cable évolue-t-elle quand on diminue ε ?

*5. On ajoute à notre problème la contrainte supplémentaire

$$y_i \geq x_i + \frac{1}{4} \quad i = 1 \dots N.$$

   Donner la projection $\pi : \mathbb{R}^2 \to K$ sur l'ensemble $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq x + 1/4\right\}$. En déduire une fonction matlab `up = projection(u)` qui projette le cable $(\mathbf{u})$ sur l'ensemble

$$D_N = \left\{(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{2N},\ y_i \geq x_i + 1/4,\ i = 1 \dots N\right\}.$$

   Résoudre enfin le problème (2) dans l'ensemble admissible D_N.

ÉCOLE CENTRALE LYON

Année 2022-2023

Analyse numérique – TD 4

Approximation des EDO

À préparer avant la séance de TD

Exercice 1. Un substance chimique y est libérée dans la nature à partir de $t = 0$ à un débit de e^{-t^2}. Celle-ci se dégrade très rapidement en une seconde substance z qui est lentement dissipée dans l'environnement. Les concentrations de ces substances vérifient le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} y'(t) = -50y(t) + e^{-t^2} & t > 0, \\ z'(t) = 50y(t) - 2z^2(t) & t > 0, \\ y(0) = z(0) = 0. \end{cases}$$

La solution (y, z) de ce problème est globale, positive et bornée. On s'intéresse à la quantité résiduelle de substance z à long terme ($t = 1000$).

1. Mettre en œuvre avec `Matlab` la méthode d'Euler pour résoudre ce problème sur l'intervalle de temps $[0, 5]$. Tracer les solutions pour $N = 125$ et $N = 250$.
2. Dans le cas où $N = 250$, vérifier que la valeur approchée de $z(t = 5)$ vaut environ $0,10778$.

*3. Montrer que la méthode d'Euler implicite conduit à définir une suite $(Y_n, Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} Y_{n+1} = \dfrac{Y_n + he^{-t_{n+1}^2}}{1 + 50h}, \\ Z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{1 + 8hZ_n + 400h^2 Y_{n+1}} - 1}{4h}, \\ Y_0 = Z_0 = 0. \end{cases}$$

Mettre en œuvre cette méthode sur l'intervalle $[0, 5]$ et comparer les résultats avec la méthode précédente pour un pas $h = 0.04$ puis $h = 0.01$. Comparer avec la méthode d'Euler explicite.

*4. Donner l'approximation de $z(1000)$ en utilisant la méthode d'Euler implicite avec $h = 0.05$.

À travailler pendant la séance de TD

Exercice 2. On considère un problème de Cauchy

$$(C) : \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & \text{sur } [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall v, w \in \mathbb{R}, \quad |f(t, v) - f(t, w)| \leqslant L|v - w|.$$

On considère la méthode donnée par

$$\left|\begin{array}{l} U_{n+1} = U_n + \dfrac{h}{2}\Big[3f(t_n, U_n) - f(t_{n-1}, U_{n-1})\Big] \quad \forall n \geqslant 1, \\ U_0 = u_0, \\ U_1 = u_0 + hf(t_0, U_0). \end{array}\right.$$

1. Justifier que (C) admet une unique solution globale $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^3$.
2. Définir l'erreur de consistance ε_n^h de la méthode et montrer que pour $n \geqslant 1$,

$$|\varepsilon_n^h| \leqslant Ch^2 \sup_{t\in[0,T]} |u'''(t)|,$$

   où C est une constante que l'on précisera.
3. Montrer que la méthode est stable.
   On pourra poser $E_n = \max(|U_n - V_n|, |U_{n-1} - V_{n-1}|)$.
4. En déduire que la méthode est convergente.

Année 2022-2023

Analyse numérique – TD 5

Résolution numérique de l'équation de Laplace

À préparer avant la séance de TD

Exercice 1. On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \ x \in]0,1[, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = -1, \end{cases}$$

avec $c(x) = x$ et $f(x) = (x^2 + \pi^2 x)\cos(\pi x) + 2\pi \sin(\pi x)$. La solution exacte est donnée par $u(x) = x\cos(\pi x)$. Adapter la méthode des différences finies vue en cours sur cet exemple. Vérifier que l'approximation de l'intégrale

$$\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x,$$

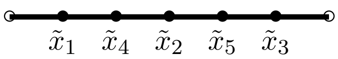
obtenue à l'aide de la méthode des rectangles à gauche pour $N = 100$ vaut -0.19765. On pourra également vérifier que la vitesse de convergence est celle prouvée en cours.

À travailler pendant la séance de TD

Exercice 2. On considère le problème aux limites étudié en cours

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \ x \in]0,1[, \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta, \end{cases}$$

On se place dans le cas d'une discrétisation de pas $h = \frac{1}{6}$, et on numérote les nœuds de la manière suivante



L'approximation par différences finies de u au nœud $\tilde{x}_i$ est notée $\tilde{u}_i$. Enfin, le vecteur $\tilde{U}$ désigne $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_5)^\mathsf{T}$, $\tilde{u}_i$ désignant l'approximation obtenue pour $u(\tilde{x}_i)$.
Écrire le système linéaire $\tilde{A}\tilde{U} = \tilde{F}$ obtenu avec cette numérotation.

Exercice 3. Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ et $c > 0$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$h = \frac{1}{N+1}, \quad x_i = ih \quad (0 \leqslant i \leqslant N+1).$$

On considère le problème discret $MU = F$, avec

$$M = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2+ch^2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2+ch^2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N+1} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. On suppose que u_i approche $u(x_i)$, où u est une fonction de classe $\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Écrire le problème aux limites satisfait par u, dont le modèle précédent est une discrétisation.

2. Montrer que, pour $V = (v_0, v_1, \dots, v_{N+1})^\intercal \in \mathbb{R}^{N+2}$,

$$(MV, V) = c\sum_{i=1}^{N} v_i^2 + \frac{1}{h^2}\sum_{i=0}^{N}(v_{i+1}-v_i)^2\,.$$

   En déduire que M est définie positive.

Simulation avec `Matlab`

Exercice 4. On considère le problème aux limites

$$\begin{cases} -u''(x) + \alpha u(x)^3 = f(x), \;\; x \in]0,1[, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \end{cases}$$

où α est une constante strictement positive, et $f \in \mathscr{C}([0,1])$ une fonction donnée.

L'approximation par différences finies de pas $h = 1/(N+1)$ conduit à l'écriture vectorielle

$$AU + \alpha[U]^3 = F,$$

où A est la matrice tridiagonale du laplacien avec conditions de Dirichlet en dimension 1, F le vecteur de composantes $f(ih)$ pour $i = 1, 2, \dots, N$; la notation $[U]^3$ désigne le vecteur dont les composantes sont U_i^3.

On propose la méthode suivante pour la résolution de ce problème :

$$\left|\begin{array}{l} U^{(0)} = 0 \in \mathbb{R}^N, \\ \text{Pour } n \geqslant 0, \quad U^{(n+1)} = A^{-1}\left(F - \alpha[U^{(n)}]^3\right). \end{array}\right. \tag{3}$$

On considérera le cas test suivant :

$$f(x) = \pi^2 x\sin(\pi x) - 2\pi\cos(\pi x) + \alpha\,(x\sin(\pi x))^3$$

correspondant à la solution exacte $u(x) = x\sin(\pi x)$.

Programmer cette méthode pour $N = 100$, et les deux valeurs $\alpha = 10$ et $\alpha = 23$. Comment interpréter le résultat ?

Analyse numérique – TD 6

Résolution numérique de l'équation de transport

À préparer avant la séance de TD

Exercice 1. On considère le problème de transport suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + c\partial_x u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T], \\ u(x,0) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{$\mathcal{T}_1$}$$

avec $c \in [0,1]$. Afin d'approcher la solution sur $[-5,5] \times [0,T]$ par la méthode des différences finies, on introduit la discrétisation en espace : $x_i = -5 + (i-1)\Delta x$ pour $i \in \{1,\dots,N_x\}$ avec $N_x \geq 2$ et $\Delta x = 10/(N_x - 1)$. On considère le schéma suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + c\dfrac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0, \quad \forall i \in \{2,\dots,N_x\}, \forall n \in \mathbb{N}, \\ U_1^n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{IG}$$

1. En posant $\beta = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ donner la matrice $\mathcal{A}$ telle que le schéma s'écrive sous forme matricielle $\mathcal{A}\mathbf{U}^{(n+1)} = \mathbf{U}^{(n)}$.
2. Écrire une fonction matlab `A = matriceA(Nx,beta)` qui prend en entrée le nombre de points de discrétisation en espace et β, et qui renvoie la matrice $\mathcal{A}$.
3. Mettre en œuvre le schéma numérique avec $N_x = 1000$ et $T = 4$. Tester différentes valeurs de c.
4. En prenant $c = \frac{1}{2}$ et $\Delta t = 0,01$, vérifier que l'approximation numérique de l'intégrale suivante, obtenue par la méthode des rectangles à gauche

$$I = \int_{-5}^{5} u(x,4)\,\mathrm{d}x.$$

vaut 1.7724.

À travailler pendant la séance de TD

Exercice 2. On étudie le Schéma de Lax-Freidrichs appliqué au problème $\mathcal{T}_1$:

$$\frac{2U_i^{n+1} - U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta t} + c\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad \forall i \in \{1,\dots,N_x\}, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{LF}$$

en utilisant la convention $U_0^n = U_{N_x+1}^n = 0$ pour tout n.

1. Écrire le schéma (LF) sous forme matricielle $\mathbf{U}^{n+1} = A\mathbf{U}^n$ en précisant la matrice A en fonction de $\beta = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$.
2. Calculer $|||A|||_\infty$. En déduire une condition suffisante sur β pour que le schéma (LF) soit stable en norme ∞.
3. Soit u la solution exacte de $\mathcal{T}_1$. Calculer les développement limités de $u(x,t+\Delta t)$, $u(x+\Delta x,t)$ et $u(x-\Delta x,t)$ au voisinage de (x,t) à l'ordre 3. Sous l'hypothèse $\Delta x/\Delta t \leq \alpha$ avec $\alpha > 0$, montrer que le schéma est consistant et donner ses ordres de consistance.

*4. Montrer que si $\Delta x/\Delta t = c$, alors le schéma est d'ordre 2 en espace et en temps.

Exercice 3. On considère le problème de transport

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + 2xt\partial_x u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T], \\ \qquad\qquad u(x,0) = x^2(1-x)^2\chi_{[0,1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{$\mathcal{T}_2$}$$

1. Donner l'équation des caractéristiques X associées à ce problème et la résoudre.
2. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $\varphi(t) = u(X(t),t)$?
3. En déduire la solution explicite de $(\mathcal{T}_2)$.

Simulation avec `Matlab`

Exercice 4. On va utiliser le schéma explicite décentré à gauche

$$\begin{cases} \dfrac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + 2x_i t_n \dfrac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad \forall i \in \{2, \ldots, N_x\}, \forall n \in \mathbb{N}, \\ \qquad\qquad U_1^n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{EG}$$

pour résoudre le problème $(\mathcal{T}_2)$ sur le domaine $[0,10]$ en prenant $T = \frac{3}{2}$.

1. Donner une écriture matricielle du schéma de la forme $\mathbf{U}^{n+1} = \mathcal{A}_n \mathbf{U}^n$. On fera apparaitre $\beta = \Delta t/\Delta x$.
2. Mettre en œuvre ce schéma. On programmera une visualisation dynamique de `U` ainsi qu'un affichage direct de la solution à l'aide des commandes `surf`, `imagesc` ou `contour`.
3. Quelle est la valeur maximale de β telle que l'on ait convergence du schéma ?

*4. En utilisant la solution exacte déterminée dans l'exercice 2, mesurer les ordres de convergence de la méthode en évaluant l'erreur en norme infinie au temps final $T = \frac{3}{2}$ pour différentes valeur de N_x et N_t respectant la condition CFL de la question précédente.