

## Exercices du cours S8 d'Analyse fonctionnelle

### Espaces de Hilbert

**Exercice 1.** Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert de produits scalaires respectifs  $(\cdot, \cdot)_1$  et  $(\cdot, \cdot)_2$ . Soit  $H = H_1 \times H_2$ .

a) Vérifier que

$$a((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = (u_1, v_1)_1 + (u_2, v_2)_2, \quad (u_1, u_2) \in H, \quad (v_1, v_2) \in H,$$

définit un produit scalaire sur  $H$  et que  $H$  est alors un espace de Hilbert.

b) Soient  $K_i \subset H_i$ ,  $i = 1, 2$ , deux ensembles convexes, fermés, non vides. Déterminer la projection dans  $H$  sur  $K = K_1 \times K_2$

**Exercice 2.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et

$$K = \{\tilde{f} \in L^2(\Omega), f \geq 0 \text{ p.p.}\}.$$

a) Montrer que  $K$  est un ensemble convexe, fermé, non vide.

b) Déterminer  $P_K$ .

### Espaces $L^p$

**Exercice 3.** Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \chi_{[n, 2n]}(x).$$

Pour quelles valeurs de  $p \geq 1$  la suite  $(\tilde{f}_n)$  converge-t-elle dans  $L^p(\mathbb{R})$  ?

**Exercice 4.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ . Soit  $f$  une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , continue sur  $\Omega$  et nulle presque partout. Montrer que  $f$  est identiquement nulle sur  $\Omega$ .

**Exercice 5.** On considère les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) \quad \text{et} \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Est-ce que ces fonctions sont égales presque partout à une fonction continue ?

**Exercice 6.** Soit  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ .

1) Vérifier que toutes les dérivées de  $\phi$  appartiennent à  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ .

2) Qu'en est-il pour les primitives? Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\phi$  pour qu'il existe  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\psi' = \phi$ .

## Dérivées faibles et espaces de Sobolev en dimension un

**Exercice 7.** On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$u(x) = \begin{cases} ex^2 & \text{si } x < 1 \\ e^x & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Etudier si  $\tilde{u} \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$  a une dérivée faible et, si oui, la calculer.

**Exercice 8.** On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Etudier si  $\tilde{H} \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$  a une dérivée faible et, si oui, la calculer.

**Exercice 9.** Soient deux réels  $a < b$ . Pour  $v \in \mathcal{L}^1(]a, b[)$ , on définit

$$\forall x \in ]a, b[, \quad u(x) = \int_a^x v(t)dt.$$

Vérifier que  $u \in \mathcal{C}^0([a, b])$ .

*Indication.* On pourra utiliser le théorème suivant.

**Théorème de continuité en un point  $x_0$ .** On se donne :

- $A \subset \mathbb{R}^k$  (mesurable)
- $I \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$
- $f : A \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$

tels que :

(i) Pour presque tout  $t \in A$ , l'application  $x \mapsto f(t, x)$  est continue en  $x_0$  ;

(ii) Il existe une fonction  $g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  intégrable telle que,  $\forall x \in I$ , pour presque tout  $t \in A$ ,  $|f(t, x)| \leq g(t)$ .

Alors l'application  $F(x) = \int_A f(t, x)dt$  est continue en  $x_0$ .

*Corrigé.* Montrons la continuité de  $u(x) = \int_a^x v(t)dt$  en tout point  $x_0 \in [a, b]$ . On note que

$$u(x) = \int_a^b \chi_{[a,x]}(t)v(t)dt \quad (1)$$

où  $\chi_{[a,x]}$  désigne la fonction caractéristique du segment  $[a, x]$ . On va donc appliquer le théorème avec

$$A = [a, b], \quad I = [a, b], \quad f(t, x) = \chi_{[a,x]}(t)v(t). \quad (2)$$

**Hypothèse (i)** On va montrer que  $\forall t \neq x_0$ , l'application  $x \mapsto f(t, x)$  est continue en  $x_0$ .

En effet (faire un dessin est conseillé)

- soit  $t < x_0$  (cas impossible si  $x_0 = a$ ). Pour  $x$  voisin de  $x_0$  on a  $t < x$  et  $\chi_{[a,x]}(t) = 1$ . Donc  $f(t, x) = v(t)$  pour  $x$  voisin de  $x_0$ , ce qui entraîne la continuité de  $x \mapsto f(t, x)$  en  $x_0$ .

- soit  $t > x_0$  (cas impossible si  $x_0 = b$ ). Pour  $x$  voisin de  $x_0$  on a  $t > x$  et  $\chi_{[a,x]}(t) = 0$ . Donc  $f(t, x) = 0$  pour  $x$  voisin de  $x_0$ , ce qui entraîne la continuité de  $x \mapsto f(t, x)$  en  $x_0$ .

**Hypothèse (ii)** :  $\forall x \in [a, b], \forall t \in [a, b]$ , on a  $|f(t, x)| \leq |v(t)|$  avec  $v$  intégrable, ce qui garantit la condition de domination.

On peut donc appliquer le théorème de continuité et conclure que  $u$  est continue en  $x_0$ ,  $\forall x_0 \in [a, b]$ . On a donc bien  $u \in \mathcal{C}^0([a, b])$ . □

**Exercice 10.** Soit  $I = ]-1, 1[$ . Les fonctions suivantes appartiennent-elles à l'espace  $H^1(]-1, 1[)$  ?

- a)  $f(x) = |x|$ .
- b)  $g(x) = 0$  si  $x \leq 0$ , 1 sinon.
- c)  $h(x) = x^\alpha$  si  $x \geq 0$ .

*Corrigé.*

a) Oui. Le calcul de la dérivée faible a été fait en cours.  $\tilde{f}$  et sa dérivée faible sont dans  $L^2(]-1, 1[)$ . Donc  $f \in H^1(]-1, 1[)$ .

b) Non. On a vu dans l'exercice 15 que  $\tilde{g}$  n'est pas faiblement dérivable.

c) Cela dépend de  $\alpha$ . Comme  $h \in C^1(]-1, 1[)$ ,  $\tilde{h}$  est faiblement dérivable et sa dérivée faible est la classe d'équivalence de  $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ .  $h$  et  $h'$  sont de carré intégrable si et seulement si  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Donc  $h \in H^1(]-1, 1[)$  si et seulement si  $\alpha > \frac{1}{2}$ . □

**Exercice 11.** I - Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in \bar{I}$ . On définit

$$V = \{v \in H^1(I), v(x_0) = 0\}.$$

- 1) Vérifier que  $V$  muni de la norme induite par  $H^1(I)$  est un espace de Hilbert.
- 2) On suppose dans cette question que  $I$  est borné. Montrer qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_{L^2(I)} \leq c \|v'\|_{L^2(I)}.$$

II - Soit  $I = ]a, b[$  un intervalle borné. On considère

$$W = \left\{ v \in H^1(I), \int_a^b v(x) dx = 0 \right\}.$$

- 3) Vérifier que  $W$  muni de la norme induite par  $H^1(I)$  est un espace de Hilbert.
- 4) Montrer qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$\forall v \in W \quad \|v\|_{L^2(I)} \leq c \|v'\|_{L^2(I)}.$$

*Corrigé.*

I - 1)  $V$  est le noyau de l'application linéaire  $L$  de  $H^1(I)$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $L : v \rightarrow v(x_0)$ . D'après le corollaire 3.17,  $L$  est continue.  $V$  est donc le noyau d'une application linéaire continue de  $H^1(I)$  dans  $\mathbb{R}$ . Il en résulte que  $V$  est un sous-espace fermé de  $H^1(I)$  et donc un espace de Hilbert quand on le munit de la norme induite par  $H^1(I)$  (chapitre 1, proposition 1.3).

I - 2) Par le théorème 3.14, on a

$$\forall v \in V, \quad v(x) = v(x_0) + \int_{x_0}^x v'(t) dt.$$

Comme  $v(x_0) = 0$  on en déduit :

$$\forall v \in V, \quad v(x) = \int_{x_0}^x v'(t) dt. \tag{3}$$

Dans les majorations qui suivent il faut faire attention car dans l'intégrale de (3) la borne supérieure n'est pas forcément plus grande que la borne inférieure. Si  $x \geq x_0$  on a

$$|v(x)| \leq \int_{x_0}^x |v'(t)| dt \leq \int_a^b |v'(t)| dt$$

alors que si  $x \leq x_0$

$$|v(x)| = \left| \int_x^{x_0} v'(t) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |v'(t)| dt \leq \int_a^b |v'(t)| dt.$$

On conclut que

$$\forall x \in [a, b], \quad |v(x)| \leq \int_a^b |v'(t)| dt.$$

Ensuite par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(I)$  :

$$\forall x \in [a, b], |v(x)| \leq \sqrt{b-a} \|v'\|_{L^2(I)}$$

et

$$\|v\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |v(x)| \leq \sqrt{b-a} \|v'\|_{L^2(I)}$$

Enfin

$$\forall v \in V, \|v\|_{L^2(I)} \leq \sqrt{b-a} \|v\|_\infty \leq (b-a) \|v'\|_{L^2(I)}$$

ce qui est l'inégalité recherchée.

II - 1)  $W$  est le noyau de l'application linéaire  $K$  de  $H^1(I)$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $K : v \rightarrow \int_a^b v(x) dx$ . Vérifions que cette application linéaire est continue. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(I)$ , on a :

$$\forall v \in W, \left| \int_a^b v(x) dx \right| \leq \sqrt{b-a} \|v\|_{L^2(I)} \leq \sqrt{b-a} \|v\|_{H^1(I)}.$$

$V$  est le noyau d'une application linéaire continue de  $H^1(I)$  dans  $\mathbb{R}$ . C'est donc un sous-espace fermé de  $H^1(I)$  et un espace de hilbert quand on le munit de la norme induite par  $H^1(I)$ .

II - 2) Une première solution consiste à utiliser des calculs analogues à ceux de la question I - 2). En effet, si  $v \in W$ , la fonction  $v$  est continue et à moyenne nulle. Donc il existe nécessairement  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $v(x_0) = 0$ . On a alors

$$v(x) = \int_{x_0}^x v'(t) dt,$$

et des calculs analogues à ci-dessus donnent

$$\forall v \in W, \|v\|_{L^2(I)} \leq (b-a) \|v'\|_{L^2(I)}.$$

La différence avec le cas I est que le point  $x_0$  dépend maintenant de la fonction  $v$  considérée mais cela n'a pas d'importance pour la conclusion.

Je présente maintenant une autre preuve qui fait davantage manipuler la formule du théorème 3.14, ce qui est un très bon entraînement pour d'autres exercices. Par cette formule on a

$$\forall v \in W, v(x) = v(a) + \int_a^x v'(t) dt. \quad (4)$$

Maintenant  $v(a)$  n'a aucune raison d'être nul. On va quand même essayer d'exprimer  $v$  en fonction de  $v'$  en se servant du fait que  $v$  est à moyenne nulle. En intégrant (4) sur  $[a, b]$ , on obtient

$$\int_a^b v(x) dx = (b-a)v(a) + \int_a^b \left( \int_a^x v'(t) dt \right) dx$$

d'où comme  $v$  est à moyenne nulle

$$v(a) = -\frac{1}{b-a} \int_a^b \left( \int_a^x v'(t) dt \right) dx$$

et en revenant à (4)

$$\forall v \in W, v(x) = -\frac{1}{b-a} \int_a^b \left( \int_a^x v'(t) dt \right) dx + \int_a^x v'(t) dt. \quad (5)$$

C'est plus compliqué que (3) mais cela va permettre de conclure. On déduit de (5) que

$$\forall v \in W, \forall x \in [a, b], |v(x)| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_a^x |v'(t)| dt dx + \int_a^x |v'(t)| dt \leq 2 \int_a^b |v'(t)| dt \quad (6)$$

Les calculs sont ensuite similaires à ce qui précède. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(I)$  :

$$\forall x \in [a, b], |v(x)| \leq 2\sqrt{b-a} \|v'\|_{L^2(I)}$$

et

$$\|v\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |v(x)| \leq 2\sqrt{b-a} \|v'\|_{L^2(I)}$$

Enfin

$$\forall v \in V, \|v\|_{L^2(I)} \leq \sqrt{b-a} \|v\|_\infty \leq 2(b-a) \|v'\|_{L^2(I)}$$

ce qui est l'inégalité recherchée. □

## Formulations variationnelles en dimension un

**Exercice 12.** On se donne  $f \in L^2(]0, 1[)$  et on considère le problème

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ dans } I = ]0, 1[ ; \\ u(0) = 0 ; u(1) = 0 . \end{cases}$$

- 1) Donner une formulation variationnelle du problème  $(\mathcal{P})$ .
- 2) Montrer que le problème variationnel admet une unique solution  $u$ .
- 3) Montrer que la solution  $u$  de la formulation variationnelle vérifie  $u \in H^2(I)$ ,  $u''(x) = -f(x)$  dans  $L^2(]0, 1[)$ .

*Corrigé.*

- 1) On suppose que  $u$  est solution du problème aux limites. En multipliant l'équation par une fonction test  $v$  et en intégrant sur  $[0, 1]$ , on trouve :

$$\int_0^1 f v = - \int_0^1 u'' v = \int_0^1 u' v' - u'(1)v(1) + u'(0)v(0). \quad (7)$$

Si la fonction test  $v$  vérifie  $v(0) = v(1) = 0$  (conditions aux limites satisfaites par  $u$ ), alors (7) devient

$$\int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv. \quad (8)$$

On introduit donc la formulation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(]0, 1[), \\ \forall v \in H_0^1(]0, 1[), \int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv. \end{array} \right. \quad (9)$$

2) On va appliquer le théorème de Lax-Milgram avec

$$H = H_0^1(]0, 1[), \quad a(u, v) = \int_0^1 u'v', \quad L(v) = \int_0^1 fv.$$

Par le cours,  $H_0^1(]0, 1[)$  muni de la norme induite par  $H^1(]0, 1[)$  est un espace de Hilbert. l'application  $a$  est clairement bilinéaire. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$ , on a

$$\forall (u, v) \in H_0^1(]0, 1[)^2, \quad |a(u, v)| \leq \|u'\|_{L^2(]0, 1[)} \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}.$$

Comme  $\|u'\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0, 1[)}$ ,  $\|v'\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0, 1[)}$ , on en déduit :

$$\forall (u, v) \in H_0^1(]0, 1[)^2, \quad |a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1(]0, 1[)} \|v\|_{H^1(]0, 1[)},$$

ce qui prouve la continuité de l'application bilinéaire. Il reste à établir la coercivité de  $a$ . On a :

$$\forall v \in H_0^1(]0, 1[), \quad a(v, v) = \int_0^1 (v')^2.$$

Par le corollaire 3.22, il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$\forall v \in H_0^1(]0, 1[), \quad \|v'\|_{L^2(]0, 1[)} \geq c \|v\|_{H^1(]0, 1[)}. \quad (10)$$

**Remarque :** on utilise ici de façon essentielle qu'on est dans  $H_0^1(]0, 1[)$ . On a donc

$$\forall v \in H_0^1(]0, 1[), \quad a(v, v) \geq c^2 \|v\|_{H^1(]0, 1[)}^2,$$

ce qui prouve la coercivité de  $a$ .

Finalement  $L$  est linéaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$  et l'inégalité  $\|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0, 1[)}$  :

$$\forall v \in H_0^1(]0, 1[), \quad |L(v)| \leq \|f\|_{L^2(]0, 1[)} \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0, 1[)} \|v\|_{H^1(]0, 1[)}$$

ce qui donne la continuité de  $L$ .

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui donne l'existence et l'unicité d'une solution  $u$  de (9)

3) On commence par montrer que  $u' \in H^1(]0, 1[)$ . On a  $C_c^\infty(]0, 1[) \subset H_0^1(]0, 1[)$ . On peut donc prendre  $v = \phi \in C_c^\infty(]0, 1[)$  dans (9). On a donc

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0, 1[), \quad \int_0^1 u' \phi' = \int_0^1 f \phi$$

Ici  $u' \in L^2(]0, 1[)$  et  $f \in L^2(]0, 1[)$ . Par la définition 3.11 de  $H^1$ , on en déduit que  $u' \in H^1(]0, 1[)$  et

$$(u')' = -f \text{ dans } L^2(]0, 1[).$$

Comme  $u \in H^1(]0, 1[)$ , on conclut que  $u \in H^2(]0, 1[)$  et  $u'' = -f$  dans  $L^2(]0, 1[)$  et p.p.  $\square$

**Exercice 13.** On se donne  $f \in L^2(]0, 1[)$  et on considère le problème

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ dans } I = ]0, 1[ ; \\ u'(0) = 0 ; u'(1) = 0 . \end{cases}$$

- 1) Donner une formulation variationnelle du problème ( $\mathcal{P}$ ).
- 2) Quelles hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites, ou pas ?
- 3) Si une solution de la formulation variationnelle (ou du problème ( $\mathcal{P}$ )) existe, est-elle à votre avis unique ?

*Corrigé.*

1) On suppose que  $u$  est solution du problème aux limites. En multipliant l'équation par une fonction test  $v$  et en intégrant sur  $[0, 1]$ , on trouve :

$$\int_0^1 f v = - \int_0^1 u'' v = \int_0^1 u' v' - u'(1)v(1) + u'(0)v(0).$$

Comme  $u'(0) = u'(1) = 0$ , on a donc

$$\int_0^1 u' v' = \int_0^1 f v. \tag{11}$$

On introduit donc la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} u \in H^1(]0, 1[), \\ \forall v \in H^1(]0, 1[), \quad \int_0^1 u' v' = \int_0^1 f v. \end{cases} \tag{12}$$

2) On va essayer d'appliquer le théorème de Lax-Milgram avec

$$H = H^1(]0, 1[), \quad a(u, v) = \int_0^1 u' v', \quad L(v) = \int_0^1 f v.$$

Par le cours,  $H^1(]0, 1[)$  est un espace de Hilbert.

l'application  $a$  est clairement bilinéaire. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$ , on a

$$\forall (u, v) \in H^1(]0, 1[)^2, |a(u, v)| \leq \|u'\|_{L^2(]0, 1[)} \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}.$$

Comme  $\|u'\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0, 1[)}$ ,  $\|v'\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0, 1[)}$ , on en déduit :

$$\forall (u, v) \in H^1(]0, 1[)^2, |a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1(]0, 1[)} \|v\|_{H^1(]0, 1[)},$$

ce qui prouve la continuité de l'application bilinéaire. Etudions la coercivité de  $a$ . On a :

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), a(v, v) = \int_0^1 (v')^2.$$

**Par contre maintenant l'analogie de (16) est faux. La forme bilinéaire  $a$  n'est pas coercive sur  $H^1(]0, 1[)$ .**

Finalement  $L$  est linéaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$  et l'inégalité  $\|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0, 1[)}$  :

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), |L(v)| \leq \|f\|_{L^2(]0, 1[)} \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0, 1[)} \|v\|_{H^1(]0, 1[)}$$

ce qui donne la continuité de  $L$ .

**Le théorème de Lax-Milgram ne peut pas être appliqué à la formulation variationnelle (12).**

3) Il ne peut pas y avoir unicité d'une solution de (12). En effet si  $u$  est solution,  $u + \alpha$ , où  $\alpha$  est un réel quelconque, est aussi solution ( $u$  n'intervient que via  $u'$ ).

□

**Exercice 14.** On se donne  $f \in L^2(]0, 1[)$  et on considère le problème

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -2u''(x) + x u(x) = f(x) \text{ dans } I = ]0, 1[ ; \\ u(0) = 0 ; u'(1) = 0 . \end{cases}$$

1) Donner une formulation variationnelle du problème  $(\mathcal{P})$ .

2) Montrer que le problème variationnel admet une unique solution  $u$ .

3) Montrer que la solution  $u$  de la formulation variationnelle vérifie  $u \in H^2(I)$ ,  $u''(x) = \frac{xu(x)}{2} - \frac{f(x)}{2}$  dans  $L^2(]0, 1[)$ ,  $u'(1) = 0$ .

4) Vérifier que si  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , alors  $u$  est de classe  $C^2$  sur  $[0, 1]$  et l'équation est vérifiée en tout point de  $[0, 1]$ .

*Corrigé.*

1) On suppose que  $u$  est solution du problème aux limites. En multipliant l'équation par une fonction test  $v$  et en intégrant sur  $[0, 1]$ , on trouve :

$$\int_0^1 f v = -2 \int_0^1 u'' v + \int_0^1 x u(x) v(x) dx$$

et

$$\int_0^1 f v = 2 \int_0^1 u' v' - 2u'(1)v(1) + 2u'(0)v(0) + \int_0^1 x u(x) v(x) dx. \quad (13)$$

Comme  $u'(1) = 0$  et si la fonction test  $v$  vérifie  $v(0) = 0$  (condition aux limites satisfaite par  $u$ ), alors (13) devient

$$2 \int_0^1 u' v' + \int_0^1 x u(x) v(x) dx = \int_0^1 f v. \quad (14)$$

On introduit donc

$$H = \{v \in H^1(]0, 1[), v(0) = 0\}$$

et la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} u \in H \\ \forall v \in H, 2 \int_0^1 u' v' + \int_0^1 x u(x) v(x) dx = \int_0^1 f v. \end{cases} \quad (15)$$

**Ici seule une des deux conditions aux limites satisfaites par  $u$  dans le problème aux limites de départ reste dans la formulation variationnelle.**

2) On va appliquer le théorème de Lax-Milgram avec

$$H = \{v \in H^1(]0, 1[), v(0) = 0\}, \quad a(u, v) = 2 \int_0^1 u' v' + \int_0^1 x u(x) v(x) dx, \quad L(v) = \int_0^1 f v.$$

L'espace  $H$  est le noyau de l'application linéaire :  $v \in H^1(]0, 1[) \rightarrow v(0)$ . Par le cours, cette application est continue de  $H^1(]0, 1[)$  dans  $\mathbb{R}$ .  $H$  est donc un sous-espace vectoriel fermé de  $H^1(]0, 1[)$  et donc un espace de Hilbert quand on le munit de la norme induite par  $H^1(]0, 1[)$ .

L'application  $a$  est clairement bilinéaire. On a

$$|a(u, v)| \leq 2 \int_0^1 |u'| |v'| + \int_0^1 |x| |u(x)| |v(x)| dx$$

et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$  et comme  $|x| \leq 1$

$$|a(u, v)| \leq 2 \|u'\|_{L^2(]0, 1[)} \|v'\|_{L^2(]0, 1[)} + \|u\|_{L^2(]0, 1[)} \|v\|_{L^2(]0, 1[)}$$

Comme  $\|u'\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0, 1[)}$ ,  $\|u\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0, 1[)}$  (et de même pour  $v$ ), on en déduit :

$$\forall (u, v) \in H^2, |a(u, v)| \leq 3 \|u\|_{H^1(]0, 1[)} \|v\|_{H^1(]0, 1[)}$$

ce qui prouve la continuité de l'application bilinéaire. Il reste à établir la coercivité de  $a$ .  
On a :

$$\forall v \in H, a(v, v) = 2 \int_0^1 (v')^2 + \int_0^1 x v^2(x) dx \geq 2 \int_0^1 (v')^2. \quad (16)$$

Montrons qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$\forall v \in H, \|v\|_{L^2(]0,1])} \leq c \|v'\|_{L^2(]0,1])}.$$

**Remarque : il s'agit de prouver une inégalité de type Poincaré pour l'espace  $H$ .** On a

$$\forall v \in H, v(x) = v(0) + \int_0^x v'(t) dt,$$

et comme  $v(0) = 0$  :

$$\forall v \in H, v(x) = \int_0^x v'(t) dt.$$

Puis

$$|v(x)| \leq \int_0^x |v'(t)| dt \leq \int_0^1 |v'(t)| dt$$

Ensuite par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1])$  :

$$\forall x \in [0, 1], |v(x)| \leq \|v'\|_{L^2(]0,1])}$$

et

$$\|v\|_{\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |v(x)| \leq \|v'\|_{L^2(]0,1])}$$

Enfin

$$\forall v \in H, \|v\|_{L^2(]0,1])} \leq \|v\|_{\infty} \leq \|v'\|_{L^2(]0,1])}$$

ce qui est l'inégalité recherchée. Ensuite on obtient que

$$\forall v \in H, \|v\|_{H^1(]0,1])}^2 = \|v\|_{L^2(]0,1])}^2 + \|v'\|_{L^2(]0,1])}^2 \leq 2 \|v'\|_{L^2(]0,1])}^2.$$

En revenant à (16) on a donc

$$\forall v \in H, a(v, v) \geq 2 \int_0^1 (v')^2 \geq \|v\|_{H^1(]0,1])}^2,$$

ce qui prouve la coercivité de  $a$ .

Finalement  $L$  est linéaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1])$  et l'inégalité  $\|v\|_{L^2(]0,1])} \leq \|v\|_{H^1(]0,1])}$  :

$$\forall v \in H, |L(v)| \leq \|f\|_{L^2(]0,1])} \|v\|_{L^2(]0,1])} \leq \|f\|_{L^2(]0,1])} \|v\|_{H^1(]0,1])}$$

ce qui donne la continuité de  $L$ .

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui donne l'existence et l'unicité d'une solution  $u$  de (15).

3) On commence par montrer que  $u' \in H^1(]0, 1[)$ . On a  $C_c^\infty(]0, 1[) \subset H^1(]0, 1[)$ . On peut donc prendre  $v = \phi \in C_c^\infty(]0, 1[)$  dans (15). On a :

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0, 1[), \quad 2 \int_0^1 u' \phi' + \int_0^1 xu(x) \phi(x) dx = \int_0^1 f \phi$$

ou

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0, 1[), \quad \int_0^1 u' \phi' = \frac{1}{2} \int_0^1 (f(x) - xu(x)) \phi(x) dx$$

Ici  $u' \in L^2(]0, 1[)$  Aussi comme  $|xu(x)| \leq |u(x)|$  et que  $u \in L^2(]0, 1[)$ , la fonction  $x \rightarrow xu(x)$  est dans  $L^2(]0, 1[)$ . Comme  $f \in L^2(]0, 1[)$ , par définition de  $H^1(]0, 1[)$ , on en déduit que  $u' \in H^1(]0, 1[)$  et

$$(u')'x = \frac{1}{2}(-f(x) + xu(x)) \text{ dans } L^2(]0, 1[).$$

Comme  $u \in H^1(]0, 1[)$ , on conclut que  $u \in H^2(]0, 1[)$  et  $u'' = -\frac{f}{2} + \frac{xu}{2}$  dans  $L^2(]0, 1[)$  et p.p.

Par la formulation variationnelle on a  $u(1) = 0$ . Il reste à déterminer la condition aux limites en 0.  $u$  vérifie

$$\forall v \in H, \quad 2 \int_0^1 u' v' + \int_0^1 xu(x) v(x) dx = \int_0^1 f v \quad (17)$$

Comme  $u \in H^2(]0, 1[)$ , en appliquant la formule d'intégration par partie à  $u'$  et  $v$  (corollaire 3.15) et comme  $v(1) = 0$ , on a

$$\forall v \in H, \quad \int_0^1 u' v' = - \int_0^1 u'' v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = - \int_0^1 u'' v - u'(0)v(0).$$

Donc en revenant à (17)

$$\forall v \in H \quad -2 \int_0^1 u'' v + \int_0^1 xu(x) v(x) dx - 2u'(0)v(0) = \int_0^1 f v$$

ou encore

$$\forall v \in H, \quad \int_0^1 (-2u''(x) + xu(x) - f(x))v(x) dx - 2u'(0)v(0) = 0. \quad (18)$$

On a vu que  $u'' = -\frac{f}{2} + \frac{xu}{2}$  dans  $L^2(]0, 1[)$ . L'intégrale dans (18) est donc nulle et on a

$$\forall v \in H, \quad -2u'(0)v(0) = 0. \quad (19)$$

En prenant  $v(x) = 1 - x$  qui appartient à  $H$ , on trouve  $u'(0) = 0$ .

4) Supposons  $f \in C([0, 1])$ . Comme  $u' \in H^1(]0, 1[)$  et, au sens faible,  $(u')' = \frac{1}{2}(-f(x) + xu(x))$ , dans  $L^1_{loc}(]0, 1[)$ , la proposition 3.7 entraîne qu'il existe un réel  $\gamma$  tel que

$$u' \in C([0, 1]) \text{ et } u'(x) = \int_0^x \frac{1}{2}(-f(t) + tu(t))dt + \gamma \text{ pour tout } .x \in [0, 1]. \quad (20)$$

Comme  $\frac{1}{2}(-f(x) + xu(x)) \in C([0, 1])$ , la formule intégrale dans (20) entraîne

$$u' \in C^1([0, 1]) \text{ et } (u')'(x) = \frac{1}{2}(-f(x) + xu(x)) \text{ pour tout } .x \in [0, 1].$$

Finalement, comme on a aussi,

$$u(x) = \int_0^x u'(t)dt + \delta \text{ pour tout } .x \in [0, 1],$$

avec  $u' \in C^1([0, 1])$  et  $\delta \in \mathbb{R}$ , on conclut que  $u \in C^2([0, 1])$  et  $u''(x) = \frac{1}{2}(-f(x) + xu(x))$  pour tout  $.x \in [0, 1]$ .

□

**Exercice 15.** Soit  $f \in L^2(]0, 1[)$ . On considère le problème

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -u''(x) + u'(x) + (3+x)u(x) = f(x) \text{ dans } I = ]0, 1[ ; \\ u'(0) = \alpha ; u'(1) = \beta . \end{cases}$$

- 1) Donner une formulation variationnelle du problème  $(\mathcal{P})$ .
- 2) Montrer que le problème variationnel admet une unique solution  $u$ .
- 3) Montrer que la solution  $u$  de la formulation variationnelle vérifie  $u \in H^2(I)$ ,  $u''(x) = u'(x) + (3+x)u(x) - f(x)$  dans  $L^2(]0, 1[)$ ,  $u'(0) = \alpha$ ,  $u'(1) = \beta$ .

*Corrigé.*

- 1) On suppose que  $u$  est solution du problème aux limites. En multipliant l'équation par une fonction test  $v$  et en intégrant sur  $[0, 1]$ , on trouve :

$$\int_0^1 f v = - \int_0^1 u'' v + \int_0^1 u' v + \int_0^1 (3+x)u(x)v(x)dx$$

et

$$\int_0^1 f v = \int_0^1 u' v' - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u' v + \int_0^1 (3+x)u(x)v(x)dx. \quad (21)$$

Comme  $u'(0) = \alpha$  et  $u'(1) = \beta$ , (21) devient

$$\int_0^1 u' v' - \beta v(1) + \alpha v(0) + \int_0^1 u' v + \int_0^1 (3+x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f v$$

On introduit donc la formulation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^1(]0, 1[) \\ \forall v \in H^1(]0, 1[), \int_0^1 u'v' + \int_0^1 u'v + \int_0^1 (3+x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 fv + \beta v(1) - \alpha v(0). \end{array} \right. \quad (22)$$

2) On va appliquer le théorème de Lax-Milgram avec

$$H = H^1(]0, 1[), \quad a(u, v) = \int_0^1 u'v' + \int_0^1 u'v + \int_0^1 (3+x)u(x)v(x)dx, \quad L(v) = \int_0^1 fv + \beta v(1) - \alpha v(0).$$

Par le cours  $H$  est un espace de Hilbert .

L'application  $a$  est clairement bilinéaire. On a

$$|a(u, v)| \leq \int_0^1 |u'| |v'| + \int_0^1 |u'| |v| + \int_0^1 (3+x) |u(x)| |v(x)| dx$$

et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$  et comme  $3+x \leq 4$

$$|a(u, v)| \leq \|u'\|_{L^2(]0,1[)} \|v'\|_{L^2(]0,1[)} + \|u'\|_{L^2(]0,1[)} \|v\|_{L^2(]0,1[)} + 4\|u\|_{L^2(]0,1[)} \|v\|_{L^2(]0,1[)}$$

Comme  $\|u'\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)}$ ,  $\|u\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)}$  (et de même pour  $v$ ). On en déduit :

$$\forall (u, v) \in H^1(]0, 1[)^2, \quad |a(u, v)| \leq 6 \|u\|_{H^1(]0,1[)} \|v\|_{H^1(]0,1[)}$$

ce qui prouve la continuité de l'application bilinéaire. Il reste à établir la coercivité de  $a$ .

On a :

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), \quad a(v, v) = \int_0^1 (v')^2 + \int_0^1 vv' + \int_0^1 (3+x)v(x)^2 dx$$

Comme  $\forall x \in [0, 1], \quad xv(x)^2 \geq 0$ , on a :

$$a(v, v) \geq \int_0^1 (v')^2 + \int_0^1 vv' + 3 \int_0^1 v^2 \quad (23)$$

**Ici  $\int_0^1 vv'$  est un terme qui n'a pas de signe et qu'il faut chercher à compenser avec les deux autres.** Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$  on a

$$\left| \int_0^1 vv' \right| \leq \|v\|_{L^2(]0,1[)} \|v'\|_{L^2(]0,1[)}$$

et en utilisant l'inégalité  $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$  vérifiée pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$\left| \int_0^1 vv' \right| \leq \frac{1}{2} \|v\|_{L^2(]0,1[)}^2 + \frac{1}{2} \|v'\|_{L^2(]0,1[)}^2 \quad (24)$$

En combinant (24) et (23) on conclut que, pour tout  $v \in H^1(]0, 1[)$  :

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \int_0^1 (v')^2 + 3 \int_0^1 v^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 (v')^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 v^2 \\ a(v, v) &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 (v')^2 + \frac{5}{2} \int_0^1 v^2 \geq \frac{1}{2} \|v\|_{H^1(]0, 1[)}^2 \end{aligned}$$

ce qui prouve la coercivité de  $a$ .

Finalement  $L$  est linéaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$  et l'inégalité  $\|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0, 1[)}$  :

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), \quad \left| \int_0^1 f v \right| \leq \|f\|_{L^2(]0, 1[)} \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0, 1[)} \|v\|_{H^1(]0, 1[)}.$$

Ensuite, par le cours, les applications  $v \rightarrow v(1)$  et  $v \rightarrow v(0)$  sont continues de  $H^1(]0, 1[)$  dans  $\mathbb{R}$ .  $L$  est donc bien continue.

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui donne l'existence et l'unicité d'une solution  $u$  de (22).

3) On commence par montrer que  $u' \in H^1(]0, 1[)$ . On a  $C_c^\infty(]0, 1[) \subset H^1(]0, 1[)$ . On peut donc prendre  $v = \phi \in C_c^\infty(]0, 1[)$  dans (22). Comme  $\phi(1) = \phi(0) = 0$ , on a :

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0, 1[), \quad \int_0^1 u' \phi' + \int_0^1 u' \phi + \int_0^1 (3+x)u(x)\phi(x)dx = \int_0^1 f \phi$$

ou

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0, 1[), \quad \int_0^1 u' \phi' = \frac{1}{2} \int_0^1 (f(x) - u'(x) - (3+x)u(x))\phi(x)dx$$

Ici  $u' \in L^2(]0, 1[)$  Aussi comme  $(3+x)|u(x)| \leq 4|u(x)|$  et que  $u \in L^2(]0, 1[)$ , la fonction  $x \rightarrow (3+x)u(x)$  est dans  $L^2(]0, 1[)$ . Comme  $f \in L^2(]0, 1[)$ , par définition de  $H^1(]0, 1[)$ , on en déduit que  $u' \in H^1(]0, 1[)$  et

$$(u')'(x) = -f(x) + u'(x) + (3+x)u(x) \text{ dans } L^2(]0, 1[).$$

Comme  $u \in H^1(]0, 1[)$ , on conclut que  $u \in H^2(]0, 1[)$  et  $u''(x) = -f(x) + u'(x) + (3+x)u(x)$  dans  $L^2(]0, 1[)$  et p.p.

Il reste à déterminer les conditions aux limites.  $u$  vérifie

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), \quad \int_0^1 u' v' + \int_0^1 u' v + \int_0^1 (3+x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f v + \beta v(1) - \alpha v(0) \quad (25)$$

Comme  $u \in H^2(]0, 1[)$ , en appliquant la formule d'intégration par partie à  $u'$  et  $v$  (corollaire 3.15), on a

$$\int_0^1 u' v' = - \int_0^1 u'' v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0).$$

Donc en revenant à (25)

$$-\int_0^1 u''v + \int_0^1 u'v + \int_0^1 (3+x)u(x)v(x)dx + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = \int_0^1 fv + \beta v(1) - \alpha v(0)$$

ou encore

$$\int_0^1 (-u''(x) + u'(x) + (3+x)u(x) - f(x))v(x)dx + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \beta v(1) + \alpha v(0) = 0. \quad (26)$$

On a vu que  $u''(x) = u'(x) + (3+x)u(x) - f(x)$  dans  $L^2(]0, 1[)$ . L'intégrale dans (26) est donc nulle et on a

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), \quad u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \beta v(1) + \alpha v(0) = 0. \quad (27)$$

En prenant  $v(x) = x$ , on en déduit  $u'(1) = \beta$ , et en prenant  $v(x) = 1 - x$ , on trouve  $u'(0) = \alpha$ .

**Exercice 16.** Soit  $f \in L^2(]0, 1[)$ . On considère le problème

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -u'' = f \text{ dans } I = ]0, 1[ ; \\ u(0) = u(1) ; u'(0) = u'(1); \\ \int_0^1 u(x)dx = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que si ce problème admet une solution  $u \in H^2(I)$  alors nécessairement :

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

On suppose désormais que  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ .

2) Donner une formulation variationnelle du problème  $(\mathcal{P})$ .

3) Montrer que le problème variationnel admet une unique solution  $u$ .

4) Montrer que la solution  $u$  de la formulation variationnelle vérifie  $u \in H^2(I)$ ,  $u'' = -f$  et  $u'(0) = u'(1)$ .

*Corrigé.*

1) On suppose que le problème aux limites  $(\mathcal{P})$  possède une solution  $u \in H^2(]0, 1[)$ . On intègre sur  $[0, 1]$  l'équation. Cela donne

$$-\int_0^1 u'' = \int_0^1 f \quad (28)$$

Comme  $u' \in H^1(]0, 1[)$ , par le théorème 3.14, on a

$$\int_0^1 u'' = \int_0^1 (u')' = u'(1) - u'(0) = 0$$

au vu de conditions aux limites satisfaites par  $u$ . L'égalité (28) entraîne donc

$$\int_0^1 f(x)dx = 0. \quad (29)$$

On suppose dans la suite cette condition réalisée.

2) On suppose que  $u$  est solution du problème aux limites. En multipliant l'équation par une fonction test  $v$  et en intégrant sur  $[0, 1]$ , on trouve :

$$\int_0^1 f v = - \int_0^1 u'' v = \int_0^1 u' v' - u'(1)v(1) + u'(0)v(0).$$

Comme  $u'(0) = u'(1)$ , et en supposant  $v(0) = v(1)$  on a donc

$$\int_0^1 u' v' = \int_0^1 f v. \quad (30)$$

On introduit donc

$$H = \{v \in H^1(]0, 1[), v(0) = v(1), \int_0^1 v(x)dx = 0\}$$

et la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} u \in H, \\ \forall v \in H, \int_0^1 u' v' = \int_0^1 f v. \end{cases} \quad (31)$$

3) On va appliquer le théorème de Lax-Milgram avec

$$H = \{v \in H^1(]0, 1[), v(0) = v(1), \int_0^1 v(x)dx = 0\}, \quad a(u, v) = \int_0^1 u' v', \quad L(v) = \int_0^1 f v.$$

Introduisons les deux applications linéaires  $L_1$  et  $L_2$  de  $H^1(]0, 1[)$  dans  $\mathbb{R}$  données par

$$L_1(v) = v(0) - v(1), \quad L_2(v) = \int_0^1 v(x)dx.$$

Par le cours  $L_1$  est la différence de deux applications linéaires continues, et donc est continue. Puis par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$ , on a :

$$\forall v \in H, \quad |L_2(v)| \leq \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0, 1[)}$$

ce qui entraîne la continuité de  $L_2$ . Comme

$$H = \text{Ker}L_1 \cap \text{Ker}L_2$$

$H$  est l'intersection de deux fermés, donc un sous-espace vectoriel fermé de  $H^1(]0, 1[)$ . C'est un espace de Hilbert quand on le munit de la norme induite par  $H^1(]0, 1[)$ .

l'application  $a$  est clairement bilinéaire. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$ , on a

$$\forall (u, v) \in H^2, |a(u, v)| \leq \|u'\|_{L^2(]0, 1[)} \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}.$$

Comme  $\|u'\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0, 1[)}$ ,  $\|v'\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0, 1[)}$ , on en déduit :

$$\forall (u, v) \in H^2, |a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1(]0, 1[)} \|v\|_{H^1(]0, 1[)},$$

ce qui prouve la continuité de l'application bilinéaire. Etudions la coercivité de  $a$ . On a :

$$\forall v \in H, a(v, v) = \int_0^1 (v')^2.$$

Soit

$$W = \{v \in H^1(]0, 1[), \int_0^1 v(x) dx = 0\}.$$

On peut montrer qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$\forall v \in W \quad \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq c \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}.$$

**C'est l'exercice 11, question 2, dont je ne ré-écris pas la solution, mais qu'il faut savoir refaire.** Comme  $H \subset W$  on en déduit que

$$\forall v \in H, \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq c \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}.$$

Ensuite on obtient que

$$\forall v \in H, \|v\|_{H^1(]0, 1[)}^2 = \|v\|_{L^2(]0, 1[)}^2 + \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}^2 \leq (c^2 + 1) \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}^2.$$

On en déduit que

$$\forall v \in H, a(v, v) \geq \frac{1}{c^2 + 1} \|v\|_{H^1(]0, 1[)}^2,$$

ce qui entraîne la coercivité de  $a$ .

Finalemnt  $L$  est linéaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$  et l'inégalité  $\|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0, 1[)}$  :

$$\forall v \in H, |L(v)| \leq \|f\|_{L^2(]0, 1[)} \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0, 1[)} \|v\|_{H^1(]0, 1[)}$$

ce qui donne la continuité de  $L$ .

Le théorème de Lax-Milgram s'applique et donne l'existence et l'unicité d'une solution de la formulation variationnelle (31).

4) **Attention : on est dans un cas où  $C_c^\infty(]0, 1[)$  n'est pas inclus dans  $H$ .** Soit  $\phi \in C_c^\infty(]0, 1[)$ . Alors la fonction  $\psi(x) = \phi(x) - \int_0^1 \phi$  appartient à  $H$  ; en effet elle appartient

à  $H^1(]0, 1[)$ , est à moyenne nulle et  $\psi(1) = \psi(0) = -\int_0^1 \phi$ . On peut donc prendre  $v = \psi$  dans (31). Cela donne :

$$\int_0^1 u' \psi' = \int_0^1 f \psi$$

et au vu de la définition de  $\psi$  :

$$\int_0^1 u' \phi' = \int_0^1 f(x)(\phi(x) - \int_0^1 \phi) dx = \int_0^1 f \phi - (\int_0^1 f)(\int_0^1 \phi)$$

En utilisant la condition (29) sur  $f$ , on conclut que

$$\int_0^1 u' \phi' = \int_0^1 f \phi$$

et ceci pour tout  $\phi \in C_c^\infty(]0, 1[)$ . Ici  $u' \in L^2(]0, 1[)$  et  $f \in L^2(]0, 1[)$ . Par la définition de  $H^1(]0, 1[)$  il en résulte que  $u' \in H^1(]0, 1[)$  et

$$(u')' = -f \text{ dans } L^2(]0, 1[).$$

Comme  $u \in H^1(]0, 1[)$ , on conclut que  $u \in H^2(]0, 1[)$  et  $u'' = -f$  dans  $L^2(]0, 1[)$  et p.p.

Il reste à montrer que  $u'(0) = u'(1)$ .  $u$  vérifie

$$\forall v \in H \quad \int_0^1 u' v' = \int_0^1 f v \tag{32}$$

Comme  $u \in H^2(]0, 1[)$ , en appliquant la formule d'intégration par partie à  $u'$  et  $v$  (corollaire 3.15), on a

$$\int_0^1 u' v' = - \int_0^1 u'' v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0).$$

Donc en revenant à (32)

$$- \int_0^1 u'' v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = \int_0^1 f v$$

ou encore

$$\int_0^1 (-u'' - f)v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0. \tag{33}$$

On a vu que  $u'' = -f$  dans  $L^2(]0, 1[)$ . L'intégrale dans (33) est donc nulle et on a

$$\forall v \in H, \quad u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0. \tag{34}$$

En prenant  $v(x) = \cos(2\pi x)$  qui est dans  $H$  (par exemple), on en déduit  $u'(1) = u'(0)$ .

□

## Topologie faible

**Exercice 17.** On considère  $\mathbb{R}^N$  muni du produit scalaire  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ . Montrer qu'une suite  $(\mathbf{x}_n)_n$  converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

*Corrigé.* Une suite convergeant fortement converge faiblement. Il s'agit de démontrer la réciproque dans un espace de dimension finie. Introduisons  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ . On a

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{e}_i.$$

Pour tout  $1 \leq i \leq N$ , l'application coordonnée  $\mathbf{x} \rightarrow x_i$  est linéaire continue de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$  car, pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ , on a  $|x_i| \leq \|\mathbf{x}\|$ .

Soit  $(\mathbf{u}_n)_n$  une suite convergeant faiblement vers  $\mathbf{u}$ . On décompose sur la base :

$$\forall n, \mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^N u_i^n \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{u} = \sum_{i=1}^N u_i \mathbf{e}_i.$$

Les applications coordonnées étant linéaires continues

$$\forall i, u_i^n \rightarrow u_i \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Il en résulte que

$$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|^2 = \sum_{i=1}^N (u_i^n - u_i)^2 \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

et  $(\mathbf{u}_n)_n$  converge vers  $\mathbf{u}$  dans  $\mathbb{R}^N$  fort.

□

**Exercice 18.** Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) La dimension de  $H$  est finie.
- (b) La boule unité fermée  $B(0, 1) = \{u \in H, \|u\| \leq 1\}$  est compacte (pour la topologie forte).

*Corrigé.* On sait que si  $H$  est de dimension finie, la boule unité fermée est compacte (pour la topologie forte). Il s'agit de démontrer la réciproque. Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable non de dimension finie. On va montrer que la boule unité fermée n'est pas compacte. L'espace  $H$  possède une base hilbertienne  $(e_n)_{n \geq 1}$ . Pour tout  $n$ , on a  $e_n \in B(0, 1)$  et pourtant la suite  $(e_n)_n$  ne possède pas de sous-suite convergeante car si  $p \neq q$  on a  $\|e_p - e_q\| = \sqrt{2}$ .

□

**Exercice 19.** Soit  $I = ]0, 1[$ ,  $\alpha > 0$ , et

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) Etudier la convergence presque partout de la suite  $(f_n)_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .  
 (b) Etudier la convergence forte dans  $L^2(]0, 1[)$  de la suite  $(\tilde{f}_n)_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .  
 (c) Etudier la convergence faible dans  $L^2(]0, 1[)$  de la suite  $(\tilde{f}_n)_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

*Rappel : l'espace des fonctions en escalier sur  $[0, 1]$  est dense dans  $L^2(0, 1)$ .*

*Corrigé.* (a) Soit  $x \in ]0, 1]$ . Il existe  $n_0 \geq 1$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on a  $\frac{1}{n} < x$ . Alors  $\forall n \geq n_0$ ,  $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . La suite  $(f_n)$  converge vers 0 pour presque tout  $x$  dans  $[0, 1]$ .

(b) Comme il y a convergence p.p. vers 0, si la suite  $(\tilde{f}_n)$  converge fortement dans  $L^2(]0, 1[)$  ce ne peut être que vers  $\tilde{0}$  (à cause du théorème 2.4). On est donc ramené à se demander si la suite  $\|f_n\|_{L^2(]0, 1[)}$  converge vers 0. Un calcul immédiat donne

$$\int_0^1 f_n(x)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^{2\alpha} dx = n^{2\alpha-1} \quad (35)$$

et  $\|f_n\|_{L^2(]0, 1[)}$   $\rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  si et seulement si  $\alpha < \frac{1}{2}$ . La suite  $(\tilde{f}_n)_n$  converge fortement dans  $L^2(]0, 1[)$  si et seulement si  $\alpha < \frac{1}{2}$ .

(c) On va discuter suivant les valeurs de  $\alpha$ . Si  $\alpha < \frac{1}{2}$ , la suite est fortement convergente donc faiblement convergente. Si  $\alpha > \frac{1}{2}$ , au vu de (35), la suite  $\|f_n\|_{L^2(]0, 1[)}$  n'est pas bornée donc la suite  $(\tilde{f}_n)_n$  ne converge pas faiblement quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Il reste le cas  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Comme la suite  $\|f_n\|_{L^2(]0, 1[)}$  est bornée, au vu de la proposition 4.4 (i) du cours, il suffit d'étudier la limite de

$$\int_0^1 f_n(x)e(x)dx$$

où  $e$  est une fonction en escalier. Soit  $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_k = 1$  une subdivision associée à la fonction en escalier  $e$ . Alors il existe  $n_0 \geq 1$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on a  $\frac{1}{n} < a_1$ . On a  $e(x) = \beta \in \mathbb{R}$  sur  $]a_0, a_1[$ . Donc pour  $n \geq n_0$  :

$$\int_0^1 f_n(x)e(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x)e(x)dx = \beta n^{\alpha-1} = \frac{\beta}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

La suite  $(\tilde{f}_n)_n$  converge vers  $\tilde{0}$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $L^2(0, 1)$  faible.

□

**Exercice 20.** Soit  $\Omega = ]0, 2\pi[$  et  $f_n(x) = \sin nx$ . Etudier la convergence faible dans  $L^2(]0, 2\pi[)$  de la suite  $(f_n)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Y a-t-il convergence forte de la suite  $(f_n)$  ?

*Indication : on pourra utiliser une base hilbertienne de  $L^2(0, 2\pi)$ .*

**Exercice 21.** Soit  $f \in L^2(]0, 1[)$  et  $n$  un entier strictement positif. On considère le problème

$$(\mathcal{P}_n) \begin{cases} -u'' = f \text{ dans } I = ]0, 1[ ; \\ u'(0) = nu(0) ; u(1) = 0 . \end{cases}$$

Ce problème dépend du paramètre  $n$ .

I - Dans la première partie,  $n$  est fixé.

1) Donner une formulation variationnelle du problème  $(\mathcal{P}_n)$ .

2) Montrer que le problème variationnel possède une unique solution.

II - On va maintenant faire varier  $n$  et on note  $u_n$  la solution de la formulation variationnelle associée à  $(\mathcal{P}_n)$  dans la partie I. On s'intéresse à la limite de  $u_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

1) Montrer qu'il existe des constantes positives  $c_1$  et  $c_2$  telles que,  $\forall n \geq 1$ , on a

$$\|u_n\|_{H^1} \leq c_1, \quad |u_n(0)| \leq \frac{c_2}{\sqrt{n}}.$$

2) Vérifier qu'on peut extraire de  $u_n$  une sous-suite  $u_{\psi(n)}$  convergeant faiblement dans  $H$  vers une limite que l'on notera  $u^*$ .

Montrer que  $u^*$  est la solution d'un problème aux limites que l'on déterminera.

Montrer que la famille entière  $u_n$  converge faiblement vers  $u^*$  dans  $H$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

*Corrigé.*

I - 1) On suppose que  $u$  est solution du problème aux limites. En multipliant l'équation par une fonction test  $v$  et en intégrant sur  $[0, 1]$ , on trouve :

$$\int_0^1 f v = - \int_0^1 u'' v$$

et

$$\int_0^1 f v = \int_0^1 u' v' - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) \tag{36}$$

Comme  $u'(0) = nu(0)$  et si la fonction test  $v$  vérifie  $v(1) = 0$  (condition aux limites satisfaite par  $u$ ), alors (36) devient

$$\int_0^1 u' v' + nu(0)v(0) = \int_0^1 f v. \tag{37}$$

On introduit donc

$$H = \{v \in H^1(]0, 1[), v(1) = 0\}$$

et la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} u \in H \\ \forall v \in H, \int_0^1 u'v' + nu(0)v(0) = \int_0^1 fv. \end{cases} \quad (38)$$

2) On va appliquer le théorème de Lax-Milgram avec

$$H = \{v \in H^1(]0, 1[), v(1) = 0\}, \quad a(u, v) = \int_0^1 u'v' + nu(0)v(0), \quad L(v) = \int_0^1 fv.$$

L'espace  $H$  est le noyau de l'application linéaire :  $v \in H^1(]0, 1[) \rightarrow v(1)$ . Par le cours, cette application est continue de  $H^1(]0, 1[)$  dans  $\mathbb{R}$ .  $H$  est donc un sous-espace vectoriel fermé de  $H^1(]0, 1[)$  et donc un espace de Hilbert quand on le munit de la norme induite par  $H^1(]0, 1[)$ .

L'application  $a$  est clairement bilinéaire. On a

$$|a(u, v)| \leq \int_0^1 |u'| |v'| + n |u(0)| |v(0)| \quad (39)$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$  et comme  $\|u'\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0, 1[)}$  et de même pour  $v$ , on a :

$$\int_0^1 |u'| |v'| \leq \|u'\|_{L^2(]0, 1[)} \|v'\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0, 1[)} \|v\|_{H^1(]0, 1[)}$$

Comme  $H^1(]0, 1[)$  s'injecte de façon continue dans  $L^\infty(]0, 1[)$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), \quad \|v\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |v(x)| \leq c \|v\|_{H^1(]0, 1[)}$$

En revenant à (40) on conclut que

$$\forall (u, v) \in H^2, \quad |a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1(]0, 1[)} \|v\|_{H^1(]0, 1[)} + nc^2 \|u\|_{H^1(]0, 1[)} \|v\|_{H^1(]0, 1[)} \quad (40)$$

ce qui prouve la continuité de l'application bilinéaire.

Il reste à établir la coercivité de  $a$ . On a :

$$\forall v \in H, \quad a(v, v) = \int_0^1 (v')^2 + nv(0)^2 \geq \int_0^1 (v')^2. \quad (41)$$

Montrons qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$\forall v \in H, \quad \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq c \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}.$$

On a

$$\forall v \in H, \quad v(x) = v(1) + \int_1^x v'(t)dt,$$

et comme  $v(1) = 0$  :

$$\forall v \in H, v(x) = \int_1^x v'(t) dt.$$

Puis

$$|v(x)| \leq \int_x^1 |v'(t)| dt \leq \int_0^1 |v'(t)| dt$$

Ensuite par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$  :

$$\forall x \in [0, 1], |v(x)| \leq \|v'\|_{L^2(]0,1[)}$$

et

$$\|v\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |v(x)| \leq \|v'\|_{L^2(]0,1[)}$$

Enfin

$$\forall v \in H, \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|v\|_\infty \leq \|v'\|_{L^2(]0,1[)} \quad (42)$$

ce qui est l'inégalité recherchée. Ensuite on obtient que

$$\forall v \in H, \|v\|_{H^1(]0,1[)}^2 = \|v\|_{L^2(]0,1[)}^2 + \|v'\|_{L^2(]0,1[)}^2 \leq 2 \|v'\|_{L^2(]0,1[)}^2. \quad (43)$$

En revenant à (41), on a donc

$$\forall v \in H, a(v, v) \geq \int_0^1 (v')^2 \geq \frac{1}{2} \|v\|_{H^1(]0,1[)}^2, \quad (44)$$

ce qui prouve la coercivité de  $a$ .

Finalement  $L$  est linéaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$  et l'inégalité  $\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0,1[)}$  :

$$\forall v \in H, |L(v)| \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|v\|_{H^1(]0,1[)}$$

ce qui donne la continuité de  $L$ .

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui donne l'existence et l'unicité d'une solution  $u$  de (38).

II - 1) Pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n$  est l'unique solution de

$$\begin{cases} u_n \in H \\ \forall v \in H, \int_0^1 u_n' v' + n u_n(0) v(0) = \int_0^1 f v. \end{cases} \quad (45)$$

On prend  $v = u_n$  dans (45). Cela donne

$$\forall n, \int_0^1 (u_n')^2 + n u_n(0)^2 = \int_0^1 f u_n.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$ , on en déduit

$$\forall n, \int_0^1 (u'_n)^2 + nu_n(0)^2 \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|u_n\|_{L^2(]0,1[)}$$

puis par l'analogie de l'inégalité de Poincaré dans  $H$ , c'est-à-dire (42)

$$\forall n, \int_0^1 (u'_n)^2 + nu_n(0)^2 \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|u'_n\|_{L^2(]0,1[)} \quad (46)$$

Comme  $nu_n(0)^2 \geq 0$ , (46) entraîne

$$\forall n, \int_0^1 (u'_n)^2 = \|u'_n\|_{L^2(]0,1[)}^2 \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|u'_n\|_{L^2(]0,1[)}$$

d'où

$$\forall n, \|u'_n\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \quad (47)$$

et par (43)

$$\forall n, \|u_n\|_{H^1(]0,1[)} \leq \sqrt{2} \|f\|_{L^2(]0,1[)}. \quad (48)$$

On revient maintenant à (48). Comme  $\int_0^1 (u'_n)^2 \geq 0$ , cette inégalité entraîne

$$\forall n, nu_n(0)^2 \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|u'_n\|_{L^2(]0,1[)}$$

d'où en utilisant (47)

$$\forall n, nu_n(0)^2 \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}^2$$

d'où

$$\forall n, |u_n(0)| \leq \frac{\|f\|_{L^2(]0,1[)}}{\sqrt{n}} \quad (49)$$

2) Par (48), la suite  $(u_n)_n$  est bornée dans  $H$  qui est un espace de Hilbert. On peut donc en extraire une sous-suite faiblement convergente : il existe une sous-suite  $(u_{\psi(n)})_n$  et il existe  $u^* \in H$  et  $u_{\psi(n)} \rightharpoonup u^*$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $H$  faible. Pour tout  $n$ ,  $u_{\psi(n)}$  est solution de :

$$\begin{cases} u_{\psi(n)} \in H \\ \forall v \in H, \int_0^1 u'_{\psi(n)} v' + \psi(n) u_{\psi(n)}(0) v(0) = \int_0^1 f v. \end{cases} \quad (50)$$

Soit  $\phi \in C_c^\infty(]0, 1[)$ . Comme  $\phi(1) = 0$  on a  $\phi \in H$  et on peut donc prendre  $v = \phi$  dans (50), ce qui donne :

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0, 1[), \int_0^1 u'_{\psi(n)} \phi' + \psi(n) u_{\psi(n)}(0) \phi(0) = \int_0^1 f \phi$$

Comme  $\phi(0) = 0$ , on conclut

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0, 1[), \int_0^1 u'_{\psi(n)} \phi' = \int_0^1 f \phi \quad (51)$$

On peut passer à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  dans le membre de gauche de l'égalité (51) car l'application  $w \rightarrow \int_0^1 w' \phi'$  est linéaire continue de  $H$  dans  $\mathbb{R}$  et  $u_{\psi(n)} \rightharpoonup u^*$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $H$  faible. On a

$$\int_0^1 u'_{\psi(n)} \phi' \rightarrow \int_0^1 (u^*)' \phi' \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Le passage à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  dans (51) donne donc :

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0, 1[), \quad \int_0^1 (u^*)' \phi' = \int_0^1 f \phi. \quad (52)$$

Cela donne l'équation vérifiée par  $u^*$ . Comme  $(u^*)' \in L^2(]0, 1[)$  et  $f \in L^2(]0, 1[)$ , (52) entraîne que  $(u^*)' \in H^1(]0, 1[)$  et  $((u^*)')' = -f$ . D'où  $u^* \in H^2(]0, 1[)$  et

$$-(u^*)'' = f \text{ dans } L^2(]0, 1[). \quad (53)$$

Déterminons maintenant les conditions aux limites satisfaites par  $u^*$ . Comme  $u^* \in H$ , on a  $u^*(1) = 0$ . Ensuite comme l'application  $w \rightarrow w(0)$  est linéaire continue de  $H$  dans  $\mathbb{R}$  et  $u_{\psi(n)} \rightharpoonup u^*$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $H$  faible, on a

$$u_{\psi(n)}(0) \rightarrow u^*(0) \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (54)$$

La majoration (55) donne pour la suite extraite

$$\forall n, \quad |u_{\psi(n)}(0)| \leq \frac{\|f\|_{L^2(]0,1])}}{\sqrt{\psi(n)}} \quad (55)$$

Comme  $\psi(n) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$  on déduit de (55) que

$$u_{\psi(n)}(0) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (56)$$

Par unicité de la limite, (54) et (56) entraînent que

$$u^*(0) = 0.$$

$u^*$  vérifie donc

$$\begin{cases} u^* \in H^1(]0, 1[), & u^*(1) = 0, & u^*(0) = 0, \\ \forall \phi \in C_c^\infty(]0, 1[), & \int_0^1 (u^*)' \phi' = \int_0^1 f \phi. \end{cases} \quad (57)$$

Pour montrer que la famille entière  $u_n$  converge faiblement vers  $u^*$  dans  $H$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , on va prouver qu'il existe une unique  $u^*$  solution de (57). Mais **attention** : (57) n'est pas une formulation variationnelle car  $u^*$  et la fonction test  $\phi$  ne sont pas dans le même espace. Ici

$$u^* \in H_0^1(]0, 1[).$$

On remarque toutefois que l'argument conduisant à (51) s'applique encore si on remplace  $\phi \in C_c^\infty(]0, 1[)$  par  $v \in H_0^1(]0, 1[)$ , car  $v \in H$  et  $v(0) = 0$ . On a donc

$$\forall v \in H_0^1(]0, 1[), \quad \int_0^1 (u^*)'v' = \int_0^1 f v$$

$u^*$  vérifie donc

$$\begin{cases} u^* \in H_0^1(]0, 1[), \\ \forall v \in H_0^1(]0, 1[), \quad \int_0^1 (u^*)'v' = \int_0^1 f v \end{cases} \quad (58)$$

*Remarque : il y a deux autres méthodes pour obtenir (58) :*

- *raisonnement par densité et continuité à partir de (57)*
- *multiplication de l'équation dans (53) par  $v \in H_0^1(]0, 1[)$  et intégration par parties, ce n'est pas formel ici*

On vérifie qu'on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram à (58) (**fait dans l'exercice 12 que je ne ré-écris pas**). La solution du problème (58) est donc unique.

La suite  $(u_n)_n$  est bornée dans  $H$  séparable (car sous-espace fermé d'un espace séparable), donc appartient à un compact pour la topologie faible. Montrons qu'elle admet une unique valeur d'adhérence. Soit  $l$  une valeur d'adhérence. Il existe une sous-suite  $(u_{\phi(n)})_n$  telle que  $u_{\phi(n)} \rightharpoonup l$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $H$  faible. Exactement comme ci-dessus pour la suite  $(u_{\psi(n)})_n$ , on montre que  $l$  est solution de (58). Comme (58) possède une unique solution  $u^*$ , on a donc  $l = u^*$ .

La suite  $(u_n)_n$  appartenant à un compact pour la topologie faible et ayant une unique valeur d'adhérence (faible), on a que  $u_n \rightharpoonup u^*$  dans  $H$  faible quand  $n \rightarrow +\infty$ .

□

**Exercice 22.** Soit  $f \in L^2(]1, 2[)$  et  $n$  un entier strictement positif. Pour  $(u, v) \in H_0^1(]0, 3[)^2$  on pose

$$a_n(u, v) = \int_0^3 u'v' + n \int_0^1 uv + n \int_2^3 uv, \quad L(v) = \int_1^2 f v.$$

1) Pour tout  $n > 0$ , montrer que la formulation variationnelle

$$\begin{cases} u_n \in H_0^1(]0, 3[) \\ \forall v \in H_0^1(]0, 3[), \quad a_n(u_n, v) = L(v), \end{cases}$$

possède une unique solution  $u_n$ .

2) Montrer qu'il existe des constantes positives  $M_1$  et  $M_2$  indépendantes de  $n > 0$  telles que

$$\int_0^3 (u_n')^2 + \int_0^3 u_n^2 \leq M_1, \quad \forall n > 0$$

$$\int_0^1 u_n^2 + \int_2^3 u_n^2 \leq \frac{M_2}{n}, \quad \forall n > 0.$$

**3)** Vérifier qu'on peut extraire de  $(u_n)_n$  une sous-suite  $(u_{\psi(n)})_n$  convergeant faiblement dans  $H_0^1(]0, 3[)$  vers une limite que l'on notera  $u^*$ .

Montrer que  $u^* = 0$  sur  $[0, 1] \cup [2, 3]$  et que, sur  $]1, 2[$ ,  $u^*$  est la solution d'un problème aux limites que l'on déterminera.

Vérifier que la suite entière  $(u_n)_n$  converge faiblement vers  $u^*$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

*Corrigé.*

1) La formulation variationnelle à étudier est

$$\begin{cases} u_n \in H_0^1(]0, 3[) \\ \forall v \in H_0^1(]0, 3[), \int_0^3 u_n' v' + n \int_0^1 u_n v + n \int_2^3 u_n v = \int_1^2 f v. \end{cases} \quad (59)$$

L'espace  $H_0^1(]0, 3[)$  est un espace de Hilbert (cours).

L'application  $a$  est clairement bilinéaire. Pour tout  $(u, v) \in H_0^1(]0, 3[)^2$ , on a

$$|a(u, v)| \leq \int_0^3 |u'| |v'| + n \int_0^1 |u| |v| + n \int_2^3 |u| |v|$$

d'où

$$|a(u, v)| \leq \int_0^3 |u'| |v'| + 2n \int_0^3 |u| |v|$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 3[)$  et comme  $\|u\|_{L^2(]0, 3[)} \leq \|u\|_{H^1(]0, 3[)}$ ,  $\|u'\|_{L^2(]0, 3[)} \leq \|u\|_{H^1(]0, 3[)}$ , et de même pour  $v$ , on a :

$$|a(u, v)| \leq (1 + 2n) \|u\|_{H^1(]0, 3[)} \|v\|_{H^1(]0, 3[)}$$

ce qui prouve la continuité de l'application bilinéaire. Pour la coercivité, on a :

$$\forall v \in H_0^1(]0, 3[), a(v, v) = \int_0^3 (v')^2 + n \int_0^1 v^2 + n \int_2^3 v^2 \geq \int_0^3 (v')^2.$$

Par le corollaire de l'inégalité de Poincaré (cours), il existe une constante  $c_1 > 0$  telle que :

$$\forall v \in H_0^1(]0, 3[), \|v'\|_{L^2(]0, 3[)} \geq c_1 \|v\|_{H^1(]0, 3[)}. \quad (60)$$

On a donc

$$\forall v \in H_0^1(]0, 3[), a(v, v) \geq c_1^2 \|v\|_{H^1(]0, 3[)}^2,$$

ce qui prouve la coercivité de  $a$ .

Finalement  $L$  est linéaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]1, 2[)$  et l'inégalité  $\|v\|_{L^2(]0, 3[)} \leq \|v\|_{H^1(]0, 3[)}$ , on a :

$$\forall v \in H_0^1(]0, 3[), |L(v)| \leq \|f\|_{L^2(]1, 2[)} \|v\|_{L^2(]1, 2[)} \leq \|f\|_{L^2(]1, 2[)} \|v\|_{L^2(]0, 3[)} \leq \|f\|_{L^2(]1, 2[)} \|v\|_{H^1(]0, 3[)}$$

ce qui donne la continuité de  $L$ .

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui donne l'existence et l'unicité d'une solution  $u_n$  de (59)

2) On prend  $v = u_n$  dans (59). Cela donne

$$\forall n, \int_0^3 (u'_n)^2 + n \int_0^1 u_n^2 + n \int_2^3 u_n^2 = \int_1^2 f u_n.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(]0, 1[)$ , on en déduit

$$\forall n, \int_0^3 (u'_n)^2 + n \int_0^1 u_n^2 + n \int_2^3 u_n^2 \leq \|f\|_{L^2(]1,2])} \|u_n\|_{L^2(]1,2])} \leq \|f\|_{L^2(]1,2])} \|u_n\|_{L^2(]0,3])} \quad (61)$$

L'inégalité de Poincaré dans  $H_0^1(]0, 3[)$  nous donne l'existence d'une constante  $c_2 > 0$  telle que

$$\forall v \in H_0^1(]0, 3[), \quad \|v\|_{L^2(]0,3])} \leq c_2 \|v'\|_{L^2(]0,3])}. \quad (62)$$

On déduit donc de (61) que

$$\forall n, \int_0^3 (u'_n)^2 + n \int_0^1 u_n^2 + n \int_2^3 u_n^2 \leq c_2 \|f\|_{L^2(]1,2])} \|u'_n\|_{L^2(]0,3])} \quad (63)$$

Comme  $n \int_0^1 u_n^2 + n \int_2^3 u_n^2 \geq 0$ , (63) entraîne

$$\forall n, \quad \|u'_n\|_{L^2(]0,3])}^2 \leq c_2 \|f\|_{L^2(]1,2])} \|u'_n\|_{L^2(]0,3])}$$

d'où

$$\forall n, \quad \|u'_n\|_{L^2(]0,3])} \leq c_2 \|f\|_{L^2(]1,2])}$$

et par (43)

$$\forall n, \quad \|u_n\|_{H^1(]0,3])} \leq \frac{c_2}{c_1} \|f\|_{L^2(]1,2])}. \quad (64)$$

On revient maintenant à (63). Comme  $\int_0^3 (u'_n)^2 \geq 0$ , cette inégalité entraîne

$$\forall n, \quad n \int_0^1 u_n^2 + n \int_2^3 u_n^2 \leq \|f\|_{L^2(]1,2])} \|u'_n\|_{L^2(]0,3])}$$

d'où en utilisant (64)

$$\forall n, \quad n \int_0^1 u_n^2 + n \int_2^3 u_n^2 \leq \frac{c_2}{c_1} \|f\|_{L^2(]1,2])}^2$$

d'où

$$\forall n, \quad \int_0^1 u_n^2 + \int_2^3 u_n^2 \leq \frac{c_2 \|f\|_{L^2(]1,2])}^2}{c_1} \frac{1}{n} \quad (65)$$

3) Au vu de (64), la suite  $(u_n)_n$  est bornée dans  $H_0^1(]0, 3[)$  qui est un espace de Hilbert. On peut donc en extraire une sous-suite faiblement convergente : il existe une sous-suite  $(u_{\psi(n)})_n$  et il existe  $u^* \in H_0^1(]0, 3[)$  et  $u_{\psi(n)} \rightharpoonup u^*$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $H_0^1(]0, 3[)$  faible. Pour tout  $n$ ,  $u_{\psi(n)}$  satisfait :

$$\forall v \in H_0^1(]0, 3[), \int_0^3 u'_{\psi(n)} v' + \psi(n) \int_0^1 u_{\psi(n)} v + \psi(n) \int_2^3 u_{\psi(n)} v = \int_1^2 f v. \quad (66)$$

Considérons l'application  $K$  de  $H_0^1(]0, 3[)$  dans  $L^2(]0, 1[)$  donnée par  $K(v) =$  restriction de  $v$  à  $]0, 1[$ .  $K$  est linéaire et continue puisque

$$\forall v \in H_0^1(]0, 3[), \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|v\|_{L^2(]0, 3[)} \leq \|v\|_{H^1(]0, 3[)}.$$

Par la proposition 4.7 du cours, comme  $u_{\psi(n)} \rightharpoonup u^*$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $H_0^1(]0, 3[)$  faible, on a  $u_{\psi(n)} \rightarrow u^*$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $L^2(]0, 1[)$  faible.

Par ailleurs, (65) avec  $n$  remplacé par  $\psi(n)$  entraîne, comme  $\int_2^3 u_{\psi(n)}^2 \geq 0$  :

$$\|u_{\psi(n)}\|_{L^2(]0, 1[)}^2 \leq \frac{c_2 \|f\|_{L^2(]1, 2[)}^2}{c_1} \frac{1}{\psi(n)} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \quad (67)$$

Donc  $u_{\psi(n)} \rightarrow \tilde{0}$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $L^2(]0, 1[)$  fort, et donc aussi dans  $L^2(]0, 1[)$  faible. Par unicité de la limite dans  $L^2(]0, 1[)$  faible, on a  $u^*(x) = 0$  pour presque tout  $x \in ]0, 1[$ . Comme  $u^*$  est continue sur  $[0, 1]$ , on conclut que

$$u^*(x) = 0 \text{ pour tout } x \in [0, 1]. \quad (68)$$

Au vu de (65), on peut faire exactement le même raisonnement sur  $]2, 3[$  et on obtient que

$$u^*(x) = 0 \text{ pour tout } x \in [2, 3]. \quad (69)$$

Intéressons-nous maintenant à ce qui se passe sur  $]1, 2[$ . Soit  $\phi \in C_c^\infty(]1, 2[)$ . Considérons  $\tilde{\phi} : ]0, 3[ \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \text{ et } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Alors  $\tilde{\phi} \in C_c^\infty(]0, 3[) \subset H_0^1(]0, 3[)$ . On peut donc prendre  $v = \tilde{\phi}$  dans (66). Cela donne :

$$\int_0^3 u'_{\psi(n)} \tilde{\phi}' + \psi(n) \int_0^1 u_{\psi(n)} \tilde{\phi} + \psi(n) \int_2^3 u_{\psi(n)} \tilde{\phi} = \int_1^2 f \tilde{\phi}. \quad (70)$$

Mais  $\tilde{\phi}(x) = 0$  sur  $[0, 1] \cup [2, 3]$  et  $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$  sur  $]1, 2[$ . Donc (70) devient

$$\int_1^2 u'_{\psi(n)} \phi' = \int_1^2 f \phi. \quad (71)$$

L'application linéaire  $w \rightarrow \int_1^2 w' \phi'$  est continue de  $H_0^1(]0, 3[)$  dans  $\mathbb{R}$  puisque pour tout  $w \in H_0^1(]0, 3[)$  :

$$\left| \int_1^2 w' \phi' \right| \leq \|w'\|_{L^2(]1, 2])} \|\phi'\|_{L^2(]1, 2])} \leq \|\phi'\|_{L^2(]1, 2])} \|w\|_{L^2(]0, 3])} \leq \|\phi'\|_{L^2(]1, 2])} \|w\|_{H^1(]0, 3])}.$$

Comme  $u_{\psi(n)} \rightharpoonup u^*$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $H_0^1(]0, 3[)$  faible, on en déduit que

$$\int_1^2 u'_{\psi(n)} \phi' \rightarrow \int_1^2 (u^*)' \phi' \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

On peut donc passer à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  dans (71), ce qui donne :

$$\int_1^2 (u^*)' \phi' = \int_1^2 f \phi. \quad (72)$$

Ici  $\phi \in C_c^\infty(]1, 2[)$  est quelconque. Comme  $(u^*)' \in L^2(]1, 2[)$  et  $f \in L^2(]1, 2[)$ , on a  $(u^*)' \in H^1(]1, 2[)$  et  $((u^*)')' = -f$ . D'où  $u^* \in H^2(]1, 2[)$  et

$$u^* \in H^2(]1, 2[) \quad - (u^*)'' = f \text{ dans } L^2(]1, 2[). \quad (73)$$

En ce qui concerne les conditions au limites, on déduit de (68) et (69) que  $u^*(1) = 0$  et  $u^*(2) = 0$ .

$u^*$  vérifie donc

$$\begin{cases} u^* \in H^2(]1, 2[), \quad - (u^*)'' = f \text{ dans } L^2(]1, 2[), \\ u^*(1) = 0, \quad u^*(2) = 0. \end{cases} \quad (74)$$

Montrons que que la suite entière  $u_n$  converge vers  $u^*$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $H_0^1(]0, 3[)$  faible. La suite  $(u_n)_n$  est bornée dans  $H_0^1(]0, 3[)$  qui est séparable (car sous-espace fermé d'un espace séparable). Elle appartient donc à un compact pour la topologie faible.

Montrons qu'elle admet une unique valeur d'adhérence. Soit  $l \in H_0^1(]0, 3[)$  une valeur d'adhérence. Il existe une sous-suite  $(u_{\phi(n)})_n$  telle que  $u_{\phi(n)} \rightharpoonup l$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $H_0^1(]0, 3[)$  faible. Exactement comme ci-dessus pour la suite  $(u_{\psi(n)})_n$ , on montre que

$$l(x) = 0 \text{ pour tout } x \in [0, 1] \cup [2, 3].$$

Aussi on prouve que  $l$  est solution de (74). Montrons que (74) possède une unique solution. Soit  $v \in H_0^1(]1, 2[)$ . En multipliant l'équation (74) par  $v$  et intégrant sur  $]1, 2[$ , on obtient

$$- \int_1^2 (u^*)'' v' = \int_1^2 f v. \quad (75)$$

Comme  $u^* \in H^2(]1, 2[)$  et  $v \in H^1(]1, 2[)$ , on peut intégrer par partie dans (75), ce qui donne

$$\int_1^2 (u^*)' v' - (u^*)'(2)v(2) + (u^*)'(1)v(1) = \int_1^2 f v.$$

et comme  $v \in H_0^1(]1, 2[)$  :

$$\int_1^2 (u^*)'v' = \int_1^2 fv.$$

*Remarque :* On peut aussi obtenir ce résultat en raisonnant par densité et continuité à partir de (72).  $u^*$  est donc solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* \in H_0^1(]1, 2[), \\ \forall v \in H_0^1(]1, 2[), \int_1^2 (u^*)'v' = \int_1^2 fv. \end{array} \right. \quad (76)$$

On vérifie qu'on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram à (76) (**fait dans l'exercice 12 que je ne ré-écris pas**). La solution du problème (76) est donc unique.

La valeur d'adhérence  $l(x)$  est donc uniquement déterminée sur  $[0, 1]$ ,  $[2, 3]$ , et  $[1, 2]$ , et égale à  $u^*$ .

La suite  $(u_n)_n$  appartenant à un compact et ayant une unique valeur d'adhérence, on a que  $u_n \rightharpoonup u^*$  dans  $H_0^1(]0, 3[)$  faible quand  $n \rightarrow +\infty$ .

□

## Espaces de Sobolev en dimension $N$

**Exercice 23. (restriction dans  $H^1(\Omega)$ )** Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts tels que  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ . Soit  $u \in H^1(\Omega_2)$ . On note  $v$  la restriction de  $u$  à  $\Omega_1$ . Vérifier que  $v \in H^1(\Omega_1)$  et que les dérivées d'ordre 1 de  $v$  sont les restrictions à  $\Omega_1$  des dérivées d'ordre 1 correspondantes de  $u$ .

**Exercice 24. (exercice plus difficile ; second temps)** Soit  $B$  la boule ouverte de  $\mathbb{R}^2$  de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $1/2$ . On considère la fonction définie p.p. sur  $B$  par

$$u(x, y) = |\ln(\sqrt{x^2 + y^2})|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1/2.$$

1) Montrer que  $u \in \mathcal{L}^p(B)$  pour tout  $p \in [1, +\infty[$  et  $u \notin \mathcal{L}^\infty(B)$ . Montrer que  $u$  n'est pas égale presque partout à une fonction continue sur  $B$ .

2) Soit  $B' = B \setminus \{(0, 0)\}$ . Montrer que  $\tilde{u}$  appartient à  $H^1(B')$  (on notera que  $u \in \mathcal{C}^1(B')$ ).

3) A quoi sont égales les dérivées faibles de  $\tilde{u} \in L_{loc}^1(B)$  si elles existent ? Montrer que  $\tilde{u} \in H^1(B)$ .

*Indication :* on pourra utiliser une formule de Green dans un ouvert bien choisi.

**Exercice 25. (questions de prolongement dans  $H^1(\Omega)$ )** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Etant donnée une fonction  $f$  définie sur  $\Omega$ , on désigne par  $\hat{f}$  son prolongement à  $\mathbb{R}^N$  par 0 hors de  $\Omega$  :

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \Omega^c \end{cases}$$

1) Soit  $u \in H^1(\Omega)$ . A-t-on  $\hat{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$  ?

2) Soit  $u \in H^1(\Omega)$  et  $\alpha \in C_c^\infty(\Omega)$ . Montrer que  $\widehat{\alpha u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$  et que

$$D_i(\widehat{\alpha u}) = \alpha D_i u + u \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}$$

**Exercice 26. (exercice plus difficile ; second temps) (opérateur de prolongement de  $H^1(]0, 1[)$  dans  $H^1(\mathbb{R})$ )**

1) Soit  $u \in H^1(]0, 1[)$ . On définit  $u^*$  sur  $] - 1, 1[$  par  $u^*(x) = u(|x|)$ . Montrer que  $u^* \in H^1(] - 1, 1[)$ .

*Indication : on pourra noter que  $u^*(x) = u(0) + \int_0^x v(t)dt$  avec  $v$  convenablement choisi.*

2) En s'inspirant de la question précédente, construire un prolongement  $u \rightarrow u^{**}$  de  $H^1(]0, 1[)$  dans  $H^1(] - 1, 3[)$ . Calculer  $\|u^{**}\|_{H^1(] - 1, 3[)}$  en fonction de  $\|u\|_{H^1(]0, 1[)}$ .

3) En utilisant la question 2 de l'exercice 5, construire un prolongement  $u \rightarrow \hat{u}$  de  $H^1(]0, 1[)$  dans  $H^1(\mathbb{R})$  qui soit linéaire continue et vérifie :  $\forall u \in H^1(]0, 1[)$ ,  $\text{Supp } \hat{u} \subset ] - 1, 3[$ .

4) Montrer que  $C_c^\infty([0, 1])$  est dense dans  $H^1(]0, 1[)$ .

5) Donner un exemple d'ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}$  et de fonction  $u \in H^1(\Omega)$  qui ne soit pas prolongeable en une fonction  $\hat{u} \in H^1(\mathbb{R})$ .

**Exercice 27.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Montrer que  $\hat{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$  où  $\hat{u}$  désigne le prolongement de  $u$  à  $\mathbb{R}^N$  par 0 hors de  $\Omega$

*Remarque : on ne fait aucune hypothèse de régularité sur l'ouvert. Le seul résultat à utiliser est donc la définition de  $H_0^1(\Omega)$*

**Exercice 28.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ .

1) Montrer qu'il existe une constante  $\hat{c}_2 > 0$  telle que :

$$\forall v \in H_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} v^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \hat{c}_m \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} |D^\alpha v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

2) En déduire que l'application  $v \rightarrow (\sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} |D^\alpha v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$  définit une norme sur  $H_0^2(\Omega)$  équivalente à celle induite par  $H^2(\Omega)$

## Formulations variationnelles en dimension $N$

**Exercice 29.** Soit  $\Omega = ]0, 1[^2$ . Le bord de  $\Omega$  est constitué des quatre segments

$$\Gamma_1 = [0, 1] \times \{0\}, \Gamma_2 = \{1\} \times [0, 1], \Gamma_3 = [0, 1] \times \{1\}, \Gamma_4 = \{0\} \times [0, 1]$$

(faire le dessin correspondant). Evidemment, l'intégrabilité de  $h : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$  est équivalente à l'intégrabilité de  $x \rightarrow h(x, 0)$  sur  $[0, 2\pi]$  et, pour une fonction  $h$  intégrable sur  $\Gamma_1$ , on a

$$\int_{\Gamma_1} h(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) = \int_0^1 h(x, 0) dx$$

avec des formules analogues sur les autres  $\Gamma_i$ . L'ouvert  $\Omega$  n'est pas régulier mais les résultats vus dans le cours pour les ouverts réguliers (formule de Green, etc) sont encore valides.

On considère le problème aux limites suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta u + \beta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u(x, 0) = 0, u(x, 1) = 0, \quad x \in ]0, 1[, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0, \quad y \in ]0, 1[, \end{cases}$$

où  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\beta \in L^\infty(\Omega)$  sont donnés. On suppose qu'il existe une constante  $\beta_0 > 0$  telle que

$$\beta(\mathbf{x}) \geq \beta_0 > 0 \text{ pour presque tout } \mathbf{x} \in \Omega.$$

- 1) Mettre le problème  $(\mathcal{P})$  sous forme variationnelle.
- 2) Montrer que la formulation variationnelle possède une unique solution  $u$ .
- 3) En supposant  $u \in H^2(\Omega)$ , expliciter l'équation et les conditions aux limites vérifiées par la solution  $u$  de la formulation variationnelle.

**Exercice 30.** On considère le problème

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta u + \beta u = f & \text{dans } \Omega ; \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + u = h & \text{sur } \Gamma ; \end{cases}$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  est un ouvert borné régulier et  $\beta \in L^\infty(\Omega)$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  et  $h \in L^2(\Gamma)$ . On suppose de plus qu'il existe une constante  $\beta_0 > 0$  telle que

$$\beta(\mathbf{x}) \geq \beta_0 > 0 \text{ pour presque tout } \mathbf{x} \in \Omega.$$

- 1) Donner une formulation variationnelle du problème  $(\mathcal{P})$ .
- 2) Montrer que le problème variationnel possède une unique solution  $u$ .
- 3) En supposant  $u \in H^2(\Omega)$ , expliciter l'équation et les conditions aux limites vérifiées par la solution  $u$  de la formulation variationnelle.

**Exercice 31.** On considère la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \beta(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

où  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\beta \in L^\infty(\Omega)$  sont donnés.

Donner des conditions suffisantes sur  $\beta$  (qui n'est pas supposée positive ou nulle p.p. comme dans le cours) qui garantissent l'existence et l'unicité d'une solution de cette formulation variationnelle.

**Exercice 32.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe régulier de  $\mathbb{R}^N$ . On considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

où  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$  est donné.

- Mettre ce problème sous forme variationnelle.
- Montrer que la formulation variationnelle possède une unique solution.

**Exercice 33.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe régulier de  $\mathbb{R}^N$ .

I - a) Montrer que  $\forall v \in H_0^2(\Omega)$  on a

$$\int_{\Omega} |\Delta v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x}.$$

b) En déduire que  $v \rightarrow \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$  est une norme sur  $H_0^2(\Omega)$  équivalente à la norme induite par  $H^2(\Omega)$ .

II - On considère maintenant l'équation des plaques :

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

où  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$  est donné.

- Mettre ce problème sous forme variationnelle.
- Montrer que la formulation variationnelle possède une unique solution.
- On suppose  $u \in H^4(\Omega)$ . Quel est le problème aux limites vérifié par la solution  $u$  de la formulation variationnelle ?