Ecole Centrale de Lyon - S8

Analyse fonctionnelle

Théorie et applications

Notes de Cours

Martine MARION

Table des matières

1 Espaces de Hilbert **4**
- 1.1 Définitions. Propriétés élémentaires . . . 4
- 1.2 Projection sur un ensemble convexe fermé . . . 5
- 1.3 Bases hilbertiennes et espaces séparables . . . 6
- 1.4 Equations variationnelles et théorème de Lax-Milgram . . . 7

2 Espaces L^p **9**
- 2.1 Définitions et premières propriétés. . . . 9
- 2.2 Principales propriétés . . . 10
  - 2.2.1 Complétude. Séparabilité. . . . 10
  - 2.2.2 Convergence dans $L^p(\Omega)$ et convergence p.p. . . . 10
  - 2.2.3 Comparaison entre les espaces L^p . . . 10
  - 2.2.4 Résultat de densité . . . 11
  - 2.2.5 Un résultat fondamental . . . 12
  - 2.2.6 Dual de $L^p(\Omega)$. . . . 13

3 Espaces de Sobolev en dimension un et formulations variationnelles **15**
- 3.1 Dérivées faibles . . . 15
  - 3.1.1 Exemples importants. . . . 15
  - 3.1.2 Résolution de $\tilde{u}' = \tilde{f}$. . . . 17
  - 3.1.3 Un résultat de “continuité”. . . . 17
  - 3.1.4 Dérivées faibles d'ordre supérieur. . . . 18
- 3.2 Espaces de Sobolev . . . 18
  - 3.2.1 Produit scalaire et norme. . . . 18
  - 3.2.2 Continuité. Formule d'intégration par parties . . . 19
  - 3.2.3 Inclusion de Sobolev . . . 20
  - 3.2.4 Espaces de Sobolev d'ordre supérieur . . . 21
  - 3.2.5 Espace $H_0^1(I)$ . . . 21
- 3.3 Exemples de formulation variationnelle . . . 22
  - 3.3.1 Conditions aux limites de Dirichlet . . . 22
  - 3.3.2 Conditions aux limites de Neumann . . . 25

4 Topologie faible dans les espaces de Hilbert et les espaces de Banach **29**
- 4.1 Démonstration du théorème de Lax-Milgram dans les espaces séparables. Méthode de Galerkin. . . . 29
- 4.2 Topologie faible dans les espaces de Hilbert . . . 32
- 4.3 Retour à la démonstration du théorème de Lax-Milgram . . . 36
- 4.4 Topologie faible dans les espaces de Banach . . . 38
  - 4.4.1 Topologie faible . . . 38

4.4.2 Topologie faible étoile. . . . 39

5 Optimisation dans les espaces de Hilbert **40**
5.1 Minimisation de fonctionnelles convexes 40
5.1.1 Fonctionnelles convexes. . . . 40
5.1.2 Convexité et topologie faible 41
5.1.3 Minimisation de fonctionnelles convexes 43
5.2 Conditions d'optimalité 44
5.2.1 Différentiation en dimension quelconque. . . . 45
5.2.2 Equation d'Euler. . . . 47
5.2.3 Conditions d'optimalité dans le cas convexe. . . . 47

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

1.1 Définitions. Propriétés élémentaires

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.1 *On appelle produit scalaire sur H toute application $a : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique et définie positive.*

Remarque. On notera souvent $a(u, v) = (u, v)$.

Propriétés

- L'application $\|u\| = (u, u)^{1/2}$ définit une norme sur H.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall u, v \in H,\ |(u, v)| \leq \|u\|\|v\|$.
- Identité du parallélogramme : $\forall u, v \in H$,

$$\|\frac{u+v}{2}\|^2 + \|\frac{u-v}{2}\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

Définition 1.2 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u, v) et qui est complet pour la norme associée $\|u\| = (u, u)^{1/2}$.*

Dans toute la suite, H désignera un espace de Hilbert.

Proposition 1.3 *Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert (muni du produit scalaire induit).*

Exemple fondamental

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace

$$L^2(\Omega) = \{\tilde{f}, f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable et t.q. } \int_\Omega f(x)^2 dx < +\infty\}$$

muni du produit scalaire :

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert. La norme associée

$$\|\tilde{f}\|_2 = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

est la norme de la convergence en moyenne quadratique.

1.2 Projection sur un ensemble convexe fermé

Définition 1.4 *Soit $K \subset H$. On dit que K est convexe si et seulement si :*

$$\forall (u,v) \in K^2,\ \forall t \in [0,1],\ tu + (1-t)v \in K.$$

Théorème 1.5 *(théorème de la projection). Soit H espace de Hilbert et $K \subset H$ un ensemble convexe, fermé, non vide. Alors pour tout $h \in H$ il existe un unique élément $u \in K$ vérifiant :*

$$\|h - u\| = \min_{v \in K} \|h - v\|.$$

On note $u = P_K(h) =$ projection de h sur K.

Démonstration.

Etape 1. Introduction d'une suite minimisante. 0n introduit une suite minimisante, c'est-à-dire une suite $(u_n)_n$ d'éléments de K telle que

$$d_n = \|h - u_n\| \to d = \inf_{v \in K} J(v), \quad \text{quand } \ n \to +\infty.$$

Etape 2. Convergence de la suite. 0n montre que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy en appliquant l'inégalité du parallélogramme à $h - u_p$ et $h - u_q$:

$$\|h - \frac{u_p + u_q}{2}\|^2 + \|\frac{u_p - u_q}{2}\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|h - u_p\|^2 + \|h - u_q\|^2\right).$$

Comme K est convexe on a $\frac{u_p+u_q}{2} \in K$ et $\|h - \frac{u_p+u_q}{2}\| \geq d$. Donc

$$\|\frac{u_p - u_q}{2}\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_p^2 + d_q^2) - d^2 \to 0 \ \text{ quand } \ p, q \to +\infty$$

Etape 3. Comme H est complet et K fermé, $\exists\, u \in K,\ u_n \to u$ quand $n \to +\infty$ et $\|h - u\| = d$.

Etape 4 : unicité. Si le minimum de J est atteint en deux points $u_1 \neq u_2$, on a $\frac{u_1+u_2}{2} \in K$ et

$$\|h - \frac{u_1 + u_2}{2}\|^2 = -\|\frac{u_1 - u_2}{2}\|^2 + \frac{1}{2}\left(\|h - u_1\|^2 + \|h - u_2\|^2\right) = -\|\frac{u_1 - u_2}{2}\|^2 + d^2 < d^2$$

d'où la contradiction.

□

Caractérisation de la projection

Théorème 1.6 *Sous les hypothèses du théorème 1.5, on a la caractérisation suivante :*

$$u = P_K(h) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in K \\ \forall v \in K,\ (h - u, v - u) \leq 0. \end{cases}$$

Cas particulier d'un sous-espace vectoriel fermé

Proposition 1.7 *(i) P_K est linéaire si et seulement si K est un sous-espace vectoriel fermé.*
(ii) Soit M un sous-espace vectoriel fermé. Alors

$$u = P_M(h) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in M \\ (h - u, v) = 0,\ \forall v \in M. \end{cases}$$

Corollaire 1.8 *Soit M un sous-espace vectoriel fermé. Alors $H = M \oplus M^{\perp}$.*

Caractérisation du dual d'un espace de Hilbert

Le dual (topologique) d'un espace vectoriel normé E est défini par :

$$E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \{L : E \to \mathbb{R} \text{ lineaire et continue}\}.$$

On le munit de la norme :

$$\|L\|_{E'} = \sup_{v \neq 0} \frac{|L(v)|}{\|v\|} .$$

Théorème 1.9 *(théorème de Riesz). Soient un espace de Hilbert H et $L \in H'$. Alors il existe $u \in H$ unique tel que :*

$$\forall v \in H, \;\; L(v) = (u, v).$$

De plus, on a $\|L\|_{H'} = \|u\|$.

1.3 Bases hilbertiennes et espaces séparables

Bases hilbertiennes

Définition 1.10 *On appelle base hilbertienne une suite (e_n) d'éléments de H telle que*
(i) $\forall m, n$, $(e_m, e_n) = \delta_{m,n}$,
(ii) L'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans H.

L'espace vectoriel engendré pas les (e_n), noté F, est défini comme l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de la suite (e_n) :

$$F = \{a, \exists\; \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ tous nuls sauf un nombre fini tels que } a = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n\}. \tag{1.3.1}$$

On a

$$\bar{F} = H \Leftrightarrow \forall u \in H, \exists\; a_n \in F \text{ tel que } a_n \to u \text{ quand } n \to +\infty\}.$$

Théorème 1.11 *On suppose que (e_n) est une base hilbertienne de H. Soit $u \in H$ et $\forall n \geq 1$, $u_n = (u, e_n)e_n$. Alors $\forall u \in H$ on a :*
(i) $u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n)e_n$, c'est-à-dire $u = \lim_{k \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} (u, e_n)e_n \right)$,
(ii) $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n)^2$ (égalité de Parseval).

Réciproquement, $(\alpha_n)_n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < +\infty$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge vers un élément $u \in H$ et on a $\alpha_n = (u, e_n)$.

Démonstration. Notons $S_k = \sum_{n=1}^{k} P_{E_n}$ où P_{E_n} désigne la projection sur le droite engendrée par e_n ; S_k est une application linéaire et continue de H dans H. Soit $u \in H$; on a

$$\|S_k(u)\|^2 = \sum_{n=1}^{k} \|u_n\|^2. \tag{1.3.2}$$

D'autre part, dû à la caractérisation de la projection, $(u, u_n) = \|u_n\|^2$. Donc par sommation $(u, S_k(u)) = \|S_k(u)\|^2$ d'où

$$\|S_k(u)\| \leq \|u\|.$$

Soit F l'espace vectoriel engendré par les e_n. Comme $\bar{F} = H$,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \bar{u} \in F,\ \|u - \bar{u}\| \leq \epsilon.$$

On a $\bar{u} = v_{i_1} + \ldots + v_{i_l}$. Donc,

$$\exists k_0,\ \forall k \geq k_0,\ S_k(\bar{u}) = \bar{u}.$$

De plus, $\|S_k(u) - S_k(\bar{u})\| \leq \|u - \bar{u}\|$. Donc, pour $k \geq k_0$,

$$\|S_k(u) - u\| \leq \|S_k(u) - S_k(\bar{u})\| + \|\bar{u} - u\| \leq 2\|u - \bar{u}\| \leq 2\epsilon.$$

On a donc bien montré que $\lim_{k \to +\infty} S_k u = u$.

Finalement, en passant à la limite quand $k \to +\infty$ dans (1.3.2), on obtient $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2$.

La démonstration de la réciproque est laissée à titre d'exercice.

$\square$

Espaces séparables

Définition 1.12 *On dit qu'un espace vectoriel normé E est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable tel que $\bar{D} = E$.*

Proposition 1.13 *Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace séparable est séparable.*

Exemple. L'espace $L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, est séparable.
Soit $(R_i)_i$ la famille dénombrable des pavés R de la forme $R = \Pi_{k=1}^{N}]a_k, b_k[$, $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$ et $R \subset \Omega$. L'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les fonctions χ_{R_i} est dénombrable et dense dans $L^2(\Omega)$.

Théorème 1.14 *Un espace de Hilbert est séparable si et seulement si il admet une base hilbertienne.*

Exemples de bases hilbertiennes

$H = L^2(]0, 2\pi[)$
- base : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$, $n \geq 1$;
- base : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\frac{nx}{2})$, $n \geq 1$;
- base : $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\frac{nx}{2})$, $n \geq 1$.

1.4 Equations variationnelles et théorème de Lax-Milgram

Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Alors a est continue si et seulement s'il existe une constante M telle que, $\forall (u, v) \in H^2$, $|a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|$.

Définition 1.15 *On dit qu'une forme bilinéaire $a : H \times H \to \mathbb{R}$ est coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que, $\forall v \in H$, $a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2$.*

Théorème 1.16 *(théorème de Lax-Milgram). Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue, coercive et soit $L \in H'$. Alors le problème*

$$\textit{Trouver } u \in H \textit{ tel que } \forall v \in H \;\; a(u,v) = L(v)$$

admet une unique solution.
De plus, si a est symétrique, u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \;\text{ et }\; J(u) = \min_{v \in H} J(v) \;\text{ avec }\; J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v).$$

Chapitre 2

Espaces L^p

Dans ce chapitre, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

2.1 Définitions et premières propriétés.

Définition 2.1 *Soit un réel $p \geq 1$. On dit que $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (mesurable) vérifie*

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty.$$

On dit que $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ si f est mesurable et $\exists\, C$ t.q. $|f(x)| \leq C$ p.p.

Pour $f \in \mathcal{L}^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$, on note

$$\|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $f \in L^\infty(\Omega)$, on note

$$\|f\|_\infty = \inf\{C,\ |f(x)| \leq C \ p.p.\}.$$

On montre que $\|f\|_\infty$ est le plus petit majorant p.p. et on l'appelle borne supérieure essentielle de f.

Inégalité de Holder

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugé de p, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Théorème 2.2 *(Inégalité de Holder).Soient $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$. Alors $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Remarque. Soient $p \geq 1$, $q \geq 1$, $r \geq 1$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ alors $fg \in \mathcal{L}^r(\Omega)$ et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Espace vectoriel et norme

Pour $1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{L}^p(\Omega)$ est un espace vectoriel. L'application $f \to \|f\|_p$ est une semi-norme mais ce n'est pas une norme car

$$\|f\|_p = 0 \iff f = 0 \text{ p.p.}$$

On note $L^p(\Omega)$ l'espace des classes d'équivalence de fonctions de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ pour la relation d'équivalence $f = g$ p.p.. L'application $\tilde{f} \to \|f\|_p$ est une norme sur $L^p(\Omega)$.
Quand $p = 2$, l'application

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = \int_\Omega fg$$

définit un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$.

2.2 Principales propriétés

2.2.1 Complétude. Séparabilité.

Théorème 2.3 *Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach ; $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. De plus, pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est séparable.*

2.2.2 Convergence dans $L^p(\Omega)$ et convergence p.p.

La convergence dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$ **n'entraîne pas** la convergence p.p.
Il existe des suites $(f_n)_n$ convergeant dans $L^p(\Omega)$ telles que, pour tout $x \in \Omega$, la suite $(f_n(x))_n$ diverge. C'est le cas de la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ de la façon suivante : on subdivise de façon successive $[0,1]$ en p intervalles de longueur $1/p$, p croissant, et on considère les fonctions caractéristiques des différents sous-intervalles :

$$f_1 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}, f_2 = \chi_{[\frac{1}{2},1]}, f_3 = \chi_{[0,\frac{1}{3}]}, f_4 = \chi_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}, f_5 = \chi_{[\frac{2}{3},1]}, f_6 = \chi_{[0,\frac{1}{4}]}, f_7 = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}, f_8 = \chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}, \dots$$

Par contre la convergence dans $L^p(\Omega)$ entraîne la convergence p.p. d'une suite extraite.

Théorème 2.4 *Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $(\tilde{f}_n)_n$ une suite convergeant vers $\tilde{f}$ dans $L^p(\Omega)$. Alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ convergeant p.p.vers f.*

2.2.3 Comparaison entre les espaces L^p

Théorème 2.5 *Supposons Ω borné et soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Alors on a*

$$L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega). \tag{2.2.1}$$

De plus il existe une constante c dépendant de p et q telle que

$$\forall \tilde{f} \in L^q(\Omega), \ \ \|\tilde{f}\|_p \leq c\|\tilde{f}\|_q. \tag{2.2.2}$$

La propriété (2.2.2) signifie que les injections dans (2.2.1) sont continues. On note

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega).$$

2.2.4 Résultat de densité

On considère l'espace $\mathcal{C}(\Omega) = \mathcal{C}^0(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$. Pour $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, on définit le support de f par

$$\text{Supp } f = \overline{\{x \in \Omega,\ f(x) \neq 0\}},$$

c'est-à-dire :

$$\text{Supp } f = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \exists x_n \in \Omega \text{ avec } \ f(x_n) \neq 0 \text{ t.q. } x_n \to x, \text{ quand } n \to +\infty \ \ (\text{dans } \mathbb{R}^N)\}.$$

Définition 2.6 *On dit que $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ est à support compact dans Ω si* Supp $f \subset \Omega$ *et* Supp f *est un ensemble borné.*

Pour f à support compact dans Ω, l'ensemble Supp f est un compact inclus dans l'ouvert Ω. La distance entre Supp f et le complémentaire de Ω, égale à $\inf_{u \in \text{Supp } f, v \in {}^c\Omega} \|u - v\|_{\mathbb{R}^N}$, est strictement positive. Par exemple, si $f \in \mathcal{C}_c(]a, b[)$, avec $a < b$ réels, il existe $a < c < d < b$ tels que Supp $f \subset [c, d] \subset]a, b[$. On a $f = 0$ sur $]a, c] \cup [c, b[$.

On note

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}(\Omega) \text{ a support compact dans } \Omega\}.$$

Si $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, alors f est bornée et $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

On considère aussi les espaces :

$$\mathcal{C}^m(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^m\},\ m \text{ entier } \geq 1, \text{ et } \ \mathcal{C}^\infty(\Omega) = \cap_{m \geq 0} \mathcal{C}^m(\Omega)$$

et

$$\mathcal{C}_c^m(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega) \cap \mathcal{C}^m(\Omega),\ m \text{ entier } \geq 1, \text{ et } \ \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega).$$

On s'intéresse à l'existence de fonctions dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Exemple. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{x^2 - 1}) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

Proposition 2.7 *Soit $x_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tels que la boule fermée $\overline{B}(x_0, R)$ de centre x_0 et de rayon R soit contenue dans Ω. Alors il existe $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $\phi \neq 0$, vérifiant* Supp $\phi \subset \overline{B}(x_0, R)$.

Pour $1 \leq p < \infty$, les fonctions de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ peuvent être approchées par des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, comme énoncé dans le résultat suivant.

Théorème 2.8 *Soit $1 \leq p < \infty$. Pour tout $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, il existe une suite $\phi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que*

$$\|\phi_n - f\|_p \to 0, \ \text{ quand } \ n \to +\infty.$$

On voit facilement que ce résultat est faux dans $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$

2.2.5 Un résultat fondamental

Fonctions localement intégrables

Définition 2.9 *On dit que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est localement intégrable sur Ω si $f \in \mathcal{L}^1(K)$ pour tout $K \subset \Omega$ fermé et borné. On note $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ l'espace des fonctions localement intégrables sur Ω.*

On note $L^1_{loc}(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions localement intégrables pour la relation d'équivalence $f = g$ p.p.

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.

Vers la notion de dérivée faible

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ et $\phi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$. Alors $f\phi \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

Théorème 2.10 *Soit $\tilde{f} \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega). \tag{2.2.3}$$

Alors $\tilde{f} = \tilde{0}$, ou $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Démonstration. On fait la démonstration pour $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$. Par le théorème 2.8, il existe une suite $\phi_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ telle que

$$\|\phi_n - f\|_2 \to 0, \quad \text{quand} \quad n \to +\infty. \tag{2.2.4}$$

0n peut prendre $\phi = \phi_n$ dans (2.2.3), ce qui donne

$$\forall n, \quad \int_\Omega f(x)\phi_n(x)dx = 0. \tag{2.2.5}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Omega)$:

$$|\int_\Omega f(x)\phi_n(x)dx - \int_\Omega f(x)^2dx| = |\int_\Omega f(x)(\phi_n(x) - f(x))dx| \leq \|f\|_2\|\phi_n - f\|_2.$$

Grâce à (2.2.4), il en résulte que

$$\int_\Omega f(x)\phi_n(x)dx \to \int_\Omega f(x)^2dx \text{ quand } n \to +\infty.$$

Au vu de (2.2.5), on en déduit que

$$\int_\Omega f(x)^2dx = 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

D'où, comme $f(x)^2 \geq 0$, $f(x)^2 = 0$ pour presque tout $x \in \Omega$, c'est-à-dire $\tilde{f} = \tilde{0}$.

$\square$

Corollaire 2.11 *Soit $\tilde{f} \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = 0, \ \ \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega \phi(x)dx = 0. \tag{2.2.6}$$

Alors, il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = c$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Démonstration. Soit $\theta \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \theta(x)dx = 1.$$

Pour $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ quelconque, on introduit la décomposition

$$\phi(x) = \phi(x) - \theta(x)\int_\Omega \phi(x)dx + \theta(x)\int_\Omega \phi(x)dx.$$

Alors

$$\psi(x) = \phi(x) - \theta(x)\int_\Omega \phi(x)dx \tag{2.2.7}$$

appartient à $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ et est à moyenne nulle. Donc, par l'hypothèse (2.2.6),

$$\int_\Omega f(x)\psi(x)dx = 0.$$

En revenant à la définition (2.2.7) de ψ, cela donne

$$\int_\Omega \left[f(x) - \int_\Omega f(y)\theta(y)dy\right]\phi(x)dx = 0.$$

Posons $c = \int_\Omega f(y)\theta(y)dy$. Comme $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ est quelconque, on peut appliquer le théorème 2.10 à $f(x) - c$. On obtient que $f(x) = c$ pour presque tout $x \in \Omega$.

□

2.2.6 Dual de $L^p(\Omega)$.

Dual de $L^p(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$

Théorème 2.12 *Soit $1 < p < \infty$ et soit $L \in (L^p(\Omega))'$. Alors il existe $\tilde{u} \in L^{p'}(\Omega)$ unique tel que*

$$\forall\ \tilde{f} \in L^p(\Omega),\ L(\tilde{f})\ = \int_\Omega uf.$$

De plus on a $\|L\|_{(L^p)'} = \|\tilde{u}\|_{p'}$.

Le théorème 2.12 exprime que toute forme linéaire sur $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$ se représente à partir d'un élément de $L^{p'}(\Omega)$. De plus l'application $L \mapsto \tilde{u}$ est une isométrie qui permet d'identifier $(L^p(\Omega))'$ et $L^{p'}(\Omega)$. On écrit $L^{p'}(\Omega) = (L^p(\Omega))'$.

Au sujet de $L^1(\Omega)$ et de $L^\infty(\Omega)$

Théorème 2.13 *Soit $L \in (L^1(\Omega))'$. Alors il existe $\tilde{u} \in L^\infty(\Omega)$ unique tel que*

$$\forall\ \tilde{f} \in L^1(\Omega),\ L(\tilde{f})\ = \int_\Omega uf.$$

On a de plus $\|L\|_{(L^1)'} = \|\tilde{u}\|_\infty$.

Le théorème 2.13 affirme que toute forme linéaire sur $L^1(\Omega)$ se représente à partir d'un élément de $L^\infty(\Omega)$. De plus l'application $L \mapsto \tilde{u}$ est une isométrie qui permet d'identifier $(L^1(\Omega))'$ et $L^\infty(\Omega)$. On écrit $L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))'$.

Attention. Le dual de $L^\infty(\Omega)$ ne s'identifie pas à $L^1(\Omega)$.

Chapitre 3

Espaces de Sobolev en dimension un et formulations variationnelles

3.1 Dérivées faibles

Soit $I =]a, b[\ , -\infty \leq a < b \leq +\infty$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ borné ou non.

Définition 3.1 *On dit que $\tilde{u} \in L^1_{loc}(I)$ est dérivable au sens faible s'il existe $\tilde{v} \in L^1_{loc}(I)$ tel que :*

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \quad \int_a^b u\phi' = -\int_a^b v\phi. \tag{3.1.1}$$

Proposition 3.2 *Si $\tilde{u} \in L^1_{loc}(I)$ est dérivable au sens faible, alors il existe un unique $\tilde{v} \in L^1_{loc}(I)$ satisfaisant (3.1.1). On dit que $\tilde{v}$ est la dérivée faible de $\tilde{u}$ et on note $\tilde{v} = \tilde{u}'$.*

Démonstration. Supposons que deux fonctions v_1 et v_2 de $\mathcal{L}^1_{loc}(I)$ vérifient :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \quad \int_a^b u\phi' = -\int_a^b v_1\phi = -\int_a^b v_2\phi.$$

Alors, $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \ \int_a^b (v_1 - v_2)\phi = 0$ et, grâce au théorème 2.10, $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2$.

□

3.1.1 Exemples importants.

Proposition 3.3 *Soit $u \in \mathcal{C}^1(I)$. Alors $\tilde{u}$ est dérivable au sens faible et $\tilde{u}' = \widetilde{u'}$ où u' désigne la dérivée usuelle de u.*

Démonstration. On remarque d'abord que $\tilde{u} \in L^1_{loc}(I)$. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ quelconque. Alors il existe $c < d$ tels que $\operatorname{Supp} \phi \subset [c, d] \subset]a, b[$. On a alors aussi $\operatorname{Supp} \phi' \subset [c, d]$ de sorte que $\int_a^b u\phi' = \int_c^d u\phi'$. Comme u et ϕ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le compact $[c, d]$, une intégration par parties donne

$$\int_a^b u\phi' = \int_c^d u\phi' = -\int_c^d u'\phi + u(d)\phi(d) - u(c)\phi(c).$$

Comme la fonction ϕ est nulle hors de $]c, d[$, on conclue que

$$\int_a^b u\phi' = -\int_a^b u'\phi.$$

Comme $u' \in \mathcal{C}(I) \subset \mathcal{L}^1_{loc}(I)$, on obtient que $\tilde{u}$ est dérivable au sens faible et que sa dérivée faible est la classe d'équivalence de la fonction dérivée u'.

$\square$

Proposition 3.4 *Soit $u \in \mathcal{C}^0(I)$ tel que $\exists\ a_0 = a < a_1 < ... < a_{n+1} = b$ tel que $\forall i \in \{0, ..., n\}$, $u \in \mathcal{C}^1(]a_i, a_{i+1}[)$. Soit $v : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $v(x) = u'(x)\ \forall x \in]a_i, a_{i+1}[,\ \forall i \in \{0, ..., n\}$. On suppose que $\tilde{v} \in L^1_{loc}(I)$. Alors $\tilde{u}$ est dérivable au sens faible et $\tilde{u}' = \tilde{v}$.*

Démonstration. Laissée en exercice.

L'exemple suivant est fondamental pour toute la suite.

Proposition 3.5 *Soit $\tilde{v} \in L^1_{loc}(I)$ et $\alpha \in I$. On pose*

$$u(x) = \int_\alpha^x v(t)dt, \ \ \forall x \in I.$$

Alors $\tilde{u}$ est dérivable au sens faible et $\tilde{u}' = \tilde{v}$.

Démonstration. On suppose pour simplifier $I =]0, 1[$, $\tilde{v} \in L^1(]0, 1[)$, et $\alpha = 0$. Le cas général est un peu plus technique à écrire (exercice).

La fonction $u(x) = \int_0^x v(t)dt$ est continue sur $]0, 1[$ donc localement intégrable sur $]0, 1[$ (exercice).

Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, 1[)$ quelconque. On a

$$\int_0^1 u\phi' = \int_0^1 (\int_0^x v(t)dt)\phi'(x)dx.$$

Attention : on ne peut pas faire d'intégration par parties car u n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$. On va utiliser le théorème de Fubini. On a

$$\int_0^1 (\int_0^x v(t)dt)\phi'(x)dx = \int_0^1 (\int_0^1 v(t)\chi_{[0,x]}(t)dt)\phi'(x)dx.$$

La fonction $(x, t) \to v(t)\chi_{[0,x]}\phi'(x)$ est intégrable sur $]0, 1[\times]0, 1[$ car

$$\int_0^1 \int_0^1 |v(t)|\chi_{[0,x]}|\phi'(x)|dxdt \leq (\int_0^1 |\phi'(x)|dx)(\int_0^1 |v(t)|dt) < +\infty.$$

0n peut donc appliquer le théorème de Fubini à cette fonction et l'interversion des signes somme donne :

$$\int_0^1 (\int_0^x v(t)dt)\phi'(x)dx = \int_0^1 v(t)(\int_t^1 \phi'(x)dx)dt = -\int_0^1 v(t)\phi(t)dt.$$

Comme $v \in \mathcal{L}^1_{loc}(I)$, les conclusions de la proposition en découlent aussitôt.

$\square$

3.1.2 Résolution de $\tilde{u}' = \tilde{f}$.

Proposition 3.6 *Soit $\tilde{u} \in L^1_{loc}(I)$ à dérivée faible $\tilde{u}' = \tilde{0}$. Alors, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = c$ pour presque tout $x \in I$.*

Démonstration. L'hypothèse $\tilde{u}' = \tilde{0}$ signifie

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \quad \int_a^b u\phi' = 0. \tag{3.1.2}$$

La démonstration du lemme suivant est laissé à titre d'exercice.

Lemme 3.7 *Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) Il existe $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ telle que $\phi = \psi'$.

(ii) ϕ est à moyenne nulle : $\int_I \phi(x)dx = 0$.

Au vu de ce lemme, la propriété (3.1.2) est équivalente à

$$\int_I u\phi = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I) \text{ tel que } \int_I \phi(x)dx = 0.$$

Par le corollaire 2.11, on en déduit qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $u(x) = c$ pour presque tout $x \in I$.

□

Proposition 3.8 *Soit $\tilde{f} \in L^1_{loc}(I)$. Alors les solutions de l'équation $\tilde{u}' = \tilde{f}$ sont les classes d'équivalence de $u(x) = \int_\alpha^x f(t)dt + c$, où $\alpha \in I$ est fixé et $c \in \mathbb{R}$ est quelconque*

Démonstration. Par la proposition 3.5, si on pose

$$v(x) = \int_\alpha^x f(t)dt, \quad \forall x \in I,$$

alors $\tilde{v}$ est dérivable au sens faible et $\tilde{v}' = \tilde{f}$.

Ensuite si $\tilde{w} \in L^1_{loc}(I)$ est tel que $\tilde{w}' = \tilde{f}$, alors $\tilde{w}' - \tilde{v}' = \tilde{0}$. Par la proposition 3.6, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $w(x) - v(x) = c$ pour presque tout $x \in I$. Ceci conclue la preuve de la proposition.

□

3.1.3 Un résultat de "continuité".

Proposition 3.9 *Soit $\tilde{u} \in L^1_{loc}(I)$ à dérivée faible $\tilde{v} \in L^1_{loc}(I)$. Alors il existe une unique fonction $\bar{u} \in \mathcal{C}^0(I)$ telle que $u(x) = \bar{u}(x)$ pour presque tout $x \in I$. De plus,*

$$\bar{u}(x) - \bar{u}(y) = \int_y^x v(t)dt, \quad \forall \ x, \ y \in I.$$

Démonstration. Soit $\alpha \in I$. Par la proposition 3.8, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour presque tout $x \in I$,

$$u(x) = \int_\alpha^x v(t)dt + c = \bar{u}(x).$$

La fonction $\bar{u}$ ainsi définie est continue sur I et $\bar{u}(x) - \bar{u}(y) = \int_y^x v(t)dt, \ \forall \ x, \ y \in I$.

L'unicité d'une fonction continue dans la classe d'équivalence $\tilde{u}$ résulte du fait que, si deux fonctions continues sont égales p.p., alors elles sont égales partout (exercice).

□

3.1.4 Dérivées faibles d'ordre supérieur.

Notation : Pour $\phi \in \mathcal{C}^p(I)$, on note $D^p\phi$ la dérivée d'ordre p de ϕ.

Proposition 3.10 *Soit $\tilde{u} \in L^1_{loc}(I)$. On dit que $\tilde{u}$ est dérivable au sens faible jusqu'à l'ordre $m \geq 1$ s'il existe $\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_m \in L^1_{loc}(I)$ tels que :*

$$\int_a^b u(x)D^j\phi(x)dx = (-1)^j \int_a^b v_j(x)\phi(x)dx, \ \ \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \ \forall j = 1, ..., m.$$

Les $\tilde{v}_j$ sont alors uniquement déterminés et on dit que $\tilde{v}_j$ est la dérivée faible d'ordre j de $\tilde{u}$ pour $1 \leq j \leq m$.

Proposition 3.11 *Soit $u \in \mathcal{C}^m(I)$. Alors $\tilde{u}$ est dérivable au sens faible jusqu'à l'ordre m et, $\forall j = 1, ..., m$, $\widetilde{D^j u}$ est la dérivée faible d'ordre j de $\tilde{u}$.*

3.2 Espaces de Sobolev

Soit $I =]a, b[\ , -\infty \leq a < b \leq +\infty$ un intervalle de $\mathbb{R}$ borné ou non.

Définition 3.12 *L'espace de Sobolev $H^1(I)$ est défini par :*

$$H^1(I) = \{\tilde{u} \in L^2(I) \text{ ayant une derivee faible } \tilde{u}' \in L^2(I)\}$$

On a

$$\tilde{u} \in H^1(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{u} \in L^2(I), \\ \\ \exists\ \tilde{g} \in L^2(I) \text{ t.q. } \forall \phi \in C_c^\infty(I),\ \int_a^b u\phi' = -\int_a^b g\phi. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Le lien suivant avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ résulte aisément de la proposition 3.3.

Proposition 3.13 *(i) Soit $u \in \mathcal{C}^1(I) \cap \mathcal{L}^2(I)$ tel que $u' \in \mathcal{L}^2(I)$. Alors $\tilde{u} \in H^1(I)$ et $\tilde{u}' = \tilde{u'}$.*
(ii) On suppose I borné. Pour $u \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$, $\tilde{u} \in H^1(I)$ et $\tilde{u}' = \tilde{u'}$.

Démonstration. (i) résulte de la proposition 3.3. Pour (ii), quand I est borné, une fonction continue sur $\bar{I}$ est de carré intégrable, d'où le résultat.

□

3.2.1 Produit scalaire et norme.

On définit le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(I)} = \int_I uv + \int_I u'v' \tag{3.2.4}$$

et la norme associée :

$$\|u\|_{H^1(I)} = \left(\int_I \left[|u|^2 + |u'|^2\right]\right)^{1/2}.$$

Ci-dessus, la notation 'tilde' pour la classe d'équivalence a été omise. Voir d'importantes remarques à ce sujet après le théorème 3.15

Théorème 3.14 *L'espace $H^1(I)$ muni du produit scalaire (3.2.4) est un espace de Hilbert séparable.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy de $H^1(I)$. Par définition, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall\, p \geq N$, $\forall\, q \geq N$, $\|u_p - u_q\|_{H^1(I)} \leq \epsilon$. En utilisant la définition de la norme de $H^1(I)$, cela s'écrit aussi :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, p \geq N,\ \forall\, q \geq N,\ \|u_p - u_q\|^2_{L^2(I)} + \|u'_p - u'_q\|^2_{L^2(I)} \leq \epsilon^2.$$

Les suites $(u_n)_n$ et $(u'_n)_n$ sont donc de Cauchy dans $L^2(I)$, et donc convergentes comme $L^2(I)$ est complet : il existe $u \in L^2(I)$ et $g \in L^2(I)$ tels que

$$u_n \to u \text{ dans } L^2(I), \quad u'_n \to g \text{ dans } L^2(I). \tag{3.2.5}$$

On va montrer que $u \in H^1(I)$ et $u' = g$. Par définition de la dérivée faible :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_c(I), \quad \forall n, \quad \int_a^b u_n \phi' = -\int_a^b u'_n \phi. \tag{3.2.6}$$

Comme $\phi \in L^2(I)$ et $\phi' \in L^2(I)$, les applications $w \to \int_a^b w\phi'$ et $w \to \int_a^b w\phi$ sont continues sur $L^2(I)$ (théorème de Riecz) donc les convergences dans (3.2.5) entraînent par passage à la limite dans (3.2.6) :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_c(I), \quad \forall n, \quad \int_a^b u \phi' = -\int_a^b g \phi. \tag{3.2.7}$$

Comme $u \in L^2(I)$ et $g \in L^2(I)$, (3.2.7) entraîne que $u \in H^1(I)$ et $u' = g$.

Finalement comme $u' = g$, (3.2.5) donne la convergence de la suite $(u_n)_n$ vers u dans $H^1(I)$.

□

3.2.2 Continuité. Formule d'intégration par parties

Théorème 3.15 *Soit $\tilde{u} \in H^1(I)$. Alors il existe une unique fonction $\bar{u} \in \mathcal{C}(\bar{I})$ telle que $u(x) = \bar{u}(x)$ pour presque tout $x \in I$. De plus, $\forall x, y \in \bar{I}$,*

$$\bar{u}(x) - \bar{u}(y) = \int_y^x v(t)dt, v \text{ quelconque dans } \tilde{u}'.$$

Démonstration. C'est presque une ré-écriture de la proposition 3.9. Toutefois, de plus, comme $v \in L^1(I)$, on a $\bar{u} \in \mathcal{C}(\bar{I})$.

□

Remarque importante : Dans toute la suite, on *identifie* $u \in H^1(I)$ et son unique représentant continu $\bar{u}$. On écrira $H^1(I) \subset \mathcal{C}(\bar{I})$. Aussi, on notera (de *façon abusive*) $u' \in L^2(I)$ la dérivée de u. Avec ces notations, on a :

$$\forall\, x, y \in \bar{I}, \quad u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)dt. \tag{3.2.8}$$

Corollaire 3.16 *(Intégration par parties dans $H^1(I)$). Soit $u, v \in H^1(I)$. Alors, $\forall c, d \in \bar{I}$ avec $c < d$, on a :*

$$\int_c^d u'v = u(d)v(d) - u(c)v(c) - \int_c^d uv'.$$

Cas particulier. Si I est borné : $I =]a,b[$, $a < b$, on a
$$\int_a^b u'v = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b uv'.$$

Démonstration. Pour simplifier légèrement on fait la démonstration dans le cas I borné. Par le théorème 3.15 on a
$$v(x) = v(a) + \int_a^x v'(t)dt$$
d'où :
$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b u'(x)(v(a) + \int_a^x v'(t)dt)dx = v(a)(\int_a^b u'(x)dx) + \int_a^b u'(x)(\int_a^x v'(t)dt)dx. \tag{3.2.9}$$
En appliquant à nouveau le théorème 3.15, pour le premier terme dans (3.2.9), on a
$$v(a)(\int_a^b u'(x)dx) = v(a)(u(b) - u(a)).$$
Le second terme dans (3.2.9) se traite en utilisant le théorème de Fubini de façon analogue à la preuve de la proposition 3.5. Les détails sont laissés en exercice.

□

3.2.3 Inclusion de Sobolev

Théorème 3.17 *Les fonctions de $H^1(I)$ sont bornées. De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que*
$$\forall u \in H^1(I), \quad \|u\|_\infty = \sup_{x \in \bar{I}} |u(x)| \leq c\|u\|_{H^1}. \tag{3.2.10}$$
On a donc $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$.

Démonstration. On considère le cas $I = \mathbb{R}$. On démontre d'abord l'inégalité pour $v \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$. Au sens de la dérivation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ on a $(v^2)' = 2vv'$. Ensuite comme v est à support compact :
$$v(x)^2 = 2\int_{-\infty}^x v(t)v'(t)dt \leq 2\|v\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \leq \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2,$$
d'où
$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad \|v\|_\infty \leq \|v\|_{H^1}. \tag{3.2.11}$$
On va étendre ce résultat en utilisant la densité de $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ dans $H^1(\mathbb{R})$. Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$. Il existe une suite $u_n \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\mathbb{R})$. Grâce à (3.2.11), pour tous les indices entiers p et q, on a
$$\|u_p - u_q\|_\infty \leq \|u_p - u_q\|_{H^1} \tag{3.2.12}$$
La suite est convergente dans $H^1(\mathbb{R})$ donc de Cauchy dans $H^1(\mathbb{R})$. Il résulte de (3.2.12) que $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Cet espace étant complet, il existe $v \in L^\infty(\mathbb{R})$ tel que $u_n \to u$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Par unicité de la limité dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on a $u = v$. Finalement on a aussi
$$\forall n, \quad \|u_n\|_\infty \leq \|u_n\|_{H^1}$$
et par passage à la limite quand $n \to +\infty$
$$\forall n, \quad \|u\|_\infty \leq \|u\|_{H^1}$$

□

Corollaire 3.18 *$\forall\, \alpha \in \bar{I}$ fixé, l'application $u \to u(\alpha)$ appartient au dual de $H^1(I)$.*

3.2.4 Espaces de Sobolev d'ordre supérieur

Définition 3.19 *Etant donné un entier $m \geq 2$, on définit par récurrence l'espace*

$$H^m(I) = \left\{ u \in H^{m-1}(I) \mid u' \in H^{m-1}(I) \right\}.$$

On vérifie aisément que $u \in H^m(I)$ si et seulement s'il existe $g_1, g_2, ..., g_m \in L^2(I)$ telles que :

$$\forall j = 1, 2, ..., m, \;\; \forall \phi \in C_c^\infty(I), \;\; \int_I u D^j \phi = (-1)^j \int_I g_j \phi.$$

On note $D^j u = g_j$. On a $u' = g_1, g_2 = u'' = (u')', ...$

L'espace $H^m(I)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{j=1}^{m} (D^j u, D^j v)_{L^2}$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^m}^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{j=1}^{m} \|D^j u\|_2^2$$

est un espace de Hilbert séparable.

On peut étendre à $H^m(I)$ des propriétés démontrées pour $H^1(I)$; par exemple $H^m(I) \subset \mathcal{C}^{m-1}(\bar{I})$ avec injection continue.

3.2.5 Espace $H_0^1(I)$

Définition 3.20 *L'espace $H_0^1(I)$ est l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ dans $H^1(I)$, c'est-à-dire que u appartient à $H_0^1(I)$ si et seulement s'il existe une suite $\phi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ telle que $\|\phi_n - u\|_{H^1} \to 0$ quand $n \to +\infty$.*

Muni du produit scalaire induit par $H^1(I)$, $H_0^1(I)$ est un espace de Hilbert séparable.

Les fonctions de $H_0^1(I)$ sont les fonctions de $H^1(I)$ nulles au bord, comme énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 3.21 *On a $H_0^1(I) = \{u \in H^1(I), \; u = 0 \text{ sur } \partial I\}$.*

Cas particulier. Si I est borné : $I =]a, b[$, $a < b$, on a

$$H_0^1(]a, b[) = \{u \in H^1(]a, b[), \; u(a) = u(b) = 0\}.$$

Théorème 3.22 *(Inégalité de Poincaré). Supposons I borné : $I =]a, b[$, $a < b$. Alors*

$$\forall\, u \in H_0^1(]a, b[), \;\; \|u\|_2 \leq (b - a)\|u'\|_2.$$

Démonstration. Soit $u \in H_0^1(]a,b[)$. Par le théorème 3.15 on a

$$\forall x \in [a,b],\ u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)dt.$$

Au vu du théorème 3.21, $u(a) = 0$, d'où :

$$u(x) = \int_a^x u'(t)dtt.$$

Puis

$$|u(x)| \leq \int_a^x |u'(t)|dt \leq \int_a^b |u'(t)|dt.$$

Ensuite par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]a,b[)$:

$$\forall x \in [a,b],\quad |u(x)| \leq \sqrt{b-a}\|u'\|_{L^2(]a,b[)}$$

et

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |u(x)| \leq \sqrt{b-a}\|u'\|_{L^2(]a,b[)}$$

Enfin

$$\forall u \in H_0^1(]a,b[),\quad \|u\|^2_{L^2(]a,b[)} \leq (b-a)\|u\|^2_\infty \leq (b-a)^2\|u'\|^2_{L^2(]a,b[)}$$

ce qui est l'inégalité recherchée.

□

Corollaire 3.23 *Supposons I borné. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que :*

$$\forall\ u \in H_0^1(I),\quad \|u'\|_2 \geq c\|u\|_{H^1(I)}.$$

Démonstration. Grâce à l'inégalité de Poincaré, on obtient que

$$\forall u \in H_0^1(I),\ \|u\|^2_{H^1(]a,b[)} = \|u\|^2_{L^2(]a,b[)} + \|u'\|^2_{L^2(]a,b[)} \leq\ \left[(b-a)^2+1\right]\ \|u'\|^2_{L^2(]0,1[)}$$

ce qui entraîne l'inégalité recherchée avec $c = \frac{1}{\sqrt{(b-a)^2+1}}$.

□

3.3 Exemples de formulation variationnelle

3.3.1 Conditions aux limites de Dirichlet

Nous considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u'' + 2u = f \text{ dans } I =]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3.3.13}$$

où f est un second membre qui appartient à l'espace $L^2(]0,1[)$.

Les conditions aux limites où on impose la valeur de l'inconnue u sur le bord sont dites **conditions de Dirichlet**. Quand cette valeur est nulle, comme ici, on parle de conditions de Dirichlet **homogènes**.

L'approche variationnelle pour étudier (3.3.13) est constituée de trois étapes que nous détaillons.

Etape 1 : Etablissement d'une formulation variationnelle

Dans une première étape il faut proposer une formulation variationnelle du problème aux limites (3.3.13), c'est-à-dire qu'il faut trouver une forme bilinéaire $a(.,.)$, une forme linéaire $L(.)$, et un espace de Hilbert H tels que (3.3.13) puisse se mettre sous la forme :

$$\text{Trouver } u \in H \text{ tel que } a(u,v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H. \tag{3.3.14}$$

Le but de cette première étape est seulement de trouver la formulation variationnelle (3.3.14) ; on étudiera dans la troisième étape comment et en quel sens on peut revenir au problème aux limites (3.3.13) à partir de (3.3.14).

On part de u solution du problème aux limites (3.3.13). Pour trouver la formulation variationnelle, on multiplie l'équation dans (3.3.13) par une fonction test régulière v et on intègre par partie. Cette étape 1 est formelle au sens où l'on suppose que tous les calculs effectués sont licites. Seule cette première étape sera formelle. Dès que la formulation variationnelle sera obtenue, l'étude (étapes 2 et 3) sera rigoureuse et totalement justifiée mathématiquement. On trouve :

$$\int_0^1 fv = -\int_0^1 u^{''}v + 2\int_0^1 uv = \int_0^1 u^{'}v^{'} - u^{'}(1)v(1) + u^{'}(0)v(0) + 2\int_0^1 uv. \tag{3.3.15}$$

Comme u doit satisfaire des conditions de Dirichlet homogènes, on a $u(0) = u(1) = 0$. On remarque que, *si la fonction test v vérifie de même* $v(0) = v(1) = 0$, alors (3.3.15) devient

$$\int_0^1 u^{'}v^{'} + 2\int_0^1 uv = \int_0^1 fv. \tag{3.3.16}$$

Pour que le terme de gauche de (3.3.16) ait un sens il suffit que u, v soient dans $L^2(]0,1[)$, et qu'ils aient des dérivées faible $u^{'}$, $v^{'}$ dans $L^2(]0,1[)$. Pour que le terme de droite de (3.3.16) ait un sens il suffit que u, f soient dans $L^2(]0,1[)$. Par conséquent, un choix raisonnablepour H est $H = H_0^1(]0,1[)$.

En conclusion la formulation variationnelle proposée pour (3.3.13) est :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(]0,1[), \\ \forall v \in H_0^1(]0,1[), \quad \int_0^1 u'v' + 2\int_0^1 uv = \int_0^1 fv. \end{cases} \tag{3.3.17}$$

Une solution de la formulation variationnelle sera dite *solution faible* de (3.3.13).

Etape 2 : Résolution de la formulation variationnelle

Théorème 3.24 *Soit $f \in L^2(]0,1[)$. La formulation variationnelle (3.3.17) possède une unique solution $u \in H_0^1(]0,1[)$.*

Démonstration. On va appliquer le théorème de Lax-Milgram (théorème 1.16).

Par le paragraphe précédent on sait que $H_0^1(]0,1[)$ muni de la norme

$$\|v\|_{H^1(]0,1[)} = \left(\int_0^1 v^2 + \int_0^1 (v')^2\right)^{1/2}. \tag{3.3.18}$$

est un espace de Hilbert.

On a
$$a(u,v) = \int_0^1 u'v' + 2\int_0^1 uv.$$
Clairement, a est bilinéaire. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$, on a
$$\forall (u,v) \in H_0^1(]0,1[)^2,\ |a(u,v)| \le \|u'\|_{L^2(]0,1[)}\|v'\|_{L^2(]0,1[)} + 2\|u\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)}. \tag{3.3.19}$$
Au vu de (3.3.18), on a $\|u\|_{L^2(]0,1[)} \le \|u\|_{H^1(]0,1[)}$, $\|u'\|_{L^2(]0,1[)} \le \|u\|_{H^1(]0,1[)}$ et des inégalités similaires pour les termes en v. On déduit donc de (3.3.19) la majoration :
$$\forall (u,v) \in H_0^1(]0,1[)^2,\ |a(u,v)| \le 3\ \|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}.$$
Il reste à établir la coercivité de a. On remarque que :
$$\forall v \in H_0^1(]0,1[),\ a(v,v) \ge \int_0^1 v^2 + \int_0^1 (v')^2 = \|v\|^2_{H^1(]0,1[)}$$
ce qui donne la coercivité avec $\alpha = 1$.

Finalement
$$L(v) = \int_0^1 fv$$
est linéaire et en utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$ et la définition (3.3.18) de la norme de $H_0^1(]0,1[)$:
$$\forall v \in H_0^1(]0,1[),\ |L(v)| \le \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)} \le \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}$$
ce qui donne la continuité de L.

En conclusion toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites. L'application de ce théorème donne l'existence et l'unicité d'une solution de (3.3.27).

□

Etape 3 : Interprétation de la formulation variationnelle

A ce stade, il y a existence et unicité de la solution u de la formulation variationnelle. Dans cette troisième étape, on se demande de quelle équation et en quel sens u est solution, et si u vérifie des conditions aux limites.

Proposition 3.25 *La solution u de (3.3.17) vérifie :*

(i) $u \in H^2(]0,1[)$ et $u'' = 2u - f$ dans $L^2(]0,1[)$ et p.p.

(ii) $u(0) = u(1) = 0$.

Démonstration.
(*i*) On va montrer en même temps que $u \in H^2(]0,1[)$ et calculer u''. On a $C_c^\infty(]0,1[) \subset H_0^1(]0,1[)$. On peut donc prendre $v = \phi \in C_c^\infty(]0,1[)$ dans (3.3.17). On a donc
$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[),\quad \int_0^1 u'\phi' + 2\int_0^1 u\phi = \int_0^1 f\phi$$
ou encore
$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[),\quad \int_0^1 u'\phi' = -2\int_0^1 u\phi + \int_0^1 f\phi = \int_0^1 (f-2u)\phi. \tag{3.3.20}$$

Ici $u' \in L^2(]0,1[)$ et $f - 2u \in L^2(]0,1[)$. Par la définition (3.12) de l'espace de Sobolev $H^1(]0,1[)$, on en déduit que

$$u' \in H^1(]0,1[) \text{ et } (u')' = 2u - f. \tag{3.3.21}$$

Par la définition (3.19) de $H^2(]0,1[)$, comme $u \in H^1(]0,1[)$, on conclut que $u \in H^2(]0,1[)$ et $u^{''} = 2u - f$ dans $L^2(]0,1[)$ et p.p., ce qui prouve (i).

Concernant (ii), comme $u \in H_0^1(]0,1[)$, on a $u(0) = u(1) = 0$.

$\square$

Remarque. Considérons maintenant le cas d'une fonction f continue sur $[0,1]$. Comme elle est de carré intégrable sur $]0,1[$, (3.3.17) possède une unique solution u, qui vérifie aussi $u \in H^2(]0,1[)$ et $u^{''} = 2u - f$ dans $L^2(]0,1[)$ et p.p. par l'étape 3. On peut vérifier que

$$u \in C^2([0,1]) \text{ et } u''(x) = 2u(x) - f(x) \text{ pour tout } .x \in [0,1]. \tag{3.3.22}$$

En effet comme $u' \in H^1(]0,1[)$ et, au sens faible, $(u')' = 2u - f$, la proposition 3.8 entraîne que

$$u' \in C([0,1]) \text{ et } u'(x) = \int_0^x (2u(t) - f(t))dt + c \text{ pour tout } .x \in [0,1]. \tag{3.3.23}$$

Ensuite comme $2u - f \in C([0,1])$, la formule intégrale dans (3.3.23) entraîne

$$u' \in C^1([0,1]).$$

Finalement, comme on a aussi,

$$u(x) = \int_0^x u'(t)dt + \bar{c} \text{ pour tout } .x \in [0,1],$$

avec $u' \in C^1([0,1])$, on conclut que $u \in C^2([0,1])$ et $u''(x) = 2u(x) - f(x)$ pour tout $.x \in [0,1]$.
En conclusion si $f \in C([0,1])$, la solution de la formulation variationnelle vérifie le problème aux limites (3.3.13) de façon standard. On dit aussi alors que c'est une *solution classique*.

3.3.2 Conditions aux limites de Neumann

Nous considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u^{''} + \frac{1}{2}u = f \text{ dans }]0,1[, \\ u^{'}(0) = u^{'}(1) = 0, \end{cases} \tag{3.3.24}$$

où f est un second membre qui appartient à l'espace $L^2(]0,1[)$.

Les conditions aux limites où on impose la valeur de la dérivée de l'inconnue u sur le bord sont dites **conditions de Neumann**. Quand cette valeur est nulle, comme ici, on parle de conditions de Neumann **homogènes**.

L'approche variationnelle pour étudier (3.3.24) suit les mêmes étapes que dans le premier exemple.

Etape 1 : Etablissement d'une formulation variationnelle

On multiplie l'équation dans (3.3.24) par une fonction test régulière v et on intègre par partie. On trouve :

$$\int_0^1 fv = -\int_0^1 u''v + \frac{1}{2}\int_0^1 uv = \int_0^1 u'v' - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 uv. \tag{3.3.25}$$

Comme u doit satisfaire des conditions de Neumann homogènes, on a $u'(0) = u'(1) = 0$. (3.3.25) devient donc :

$$\int_0^1 u'v' + \frac{1}{2}\int_0^1 uv = \int_0^1 fv. \tag{3.3.26}$$

On peut noter que (3.3.26) est analogue à (3.3.16) mais en apparence seulement car maintenant *on ne suppose rien sur v sur le bord.*

Pour que le terme de gauche de (3.3.26) ait un sens il suffit que u, v soient dans $L^2(]0,1[)$, et qu'ils aient des dérivées faible u', v' dans $L^2(]0,1[)$. Pour que le terme de droite de (3.3.26) ait un sens il suffit que u, f soient dans $L^2(]0,1[)$. Par conséquent, un choix raisonnable pour H est $H = H^1(]0,1[)$. Ici *on n'a pas de conditions aux limites dans l'espace H* car on n'a rien supposé sur v au bord.

En conclusion la formulation variationnelle proposée pour (3.3.24) est :

$$\begin{cases} u \in H^1(]0,1[), \\ \forall v \in H^1(]0,1[), \quad \int_0^1 u'v' + \frac{1}{2}\int_0^1 uv = \int_0^1 fv. \end{cases} \tag{3.3.27}$$

Etape 2 : Résolution de la formulation variationnelle

Théorème 3.26 *Soit $f \in L^2(]0,1[)$. La formulation variationnelle (3.3.27) possède une unique solution $u \in H^1(]0,1[)$.*

Démonstration. C'est très similaire au cas précédent. J'ai toutefois modifié un peu l'équation pour que les calculs soient différents.

Par le cours, on sait que $H^1(]0,1[)$ muni de la norme

$$\|v\|_{H^1(]0,1[)} = \left(\int_0^1 v^2 + \int_0^1 (v')^2\right)^{1/2}. \tag{3.3.28}$$

est un espace de Hilbert.

On a

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v' + \frac{1}{2}\int_0^1 uv.$$

Clairement, a est bilinéaire. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$, on a

$$\forall (u,v) \in H^1(]0,1[)^2, \ |a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2(]0,1[)}\|v'\|_{L^2(]0,1[)} + \frac{1}{2}\|u\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)}$$

et en utilisant la définition (3.3.28) de la norme de $H^1(]0,1[)$:

$$\forall (u,v) \in H^1(]0,1[)^2, \ |a(u,v)| \leq \frac{3}{2}\|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}.$$

Il reste à établir la coercivité de a :

$$\forall v \in H^1(]0,1[),\ a(v,v) \geq \frac{1}{2}\int_0^1 v^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2 = \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1(]0,1[)}$$

ce qui donne la coercivité avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

Finalement

$$L(v) = \int_0^1 fv$$

est linéaire et en utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$ et la définition (3.3.28) de la norme de $H_0^1(]0,1[)$:

$$\forall v \in H^1(]0,1[),\ |L(v)| \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}$$

ce qui donne la continuité de L.

En conclusion toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites. L'application de ce théorème donne l'existence et l'unicité d'une solution de (3.3.27).

□

Etape 3 : Interprétation de la formulation variationnelle

Proposition 3.27 *La solution u de (3.3.27) vérifie :*

(i) $u \in H^2(]0,1[)$ et $u'' = \frac{1}{2}u - f$ dans $L^2(]0,1[)$ et p.p.

(ii) $u'(0) = u'(1) = 0$.

Démonstration.
(i) Cette partie est très similaire au cas précédent. On va montrer en même temps que $u \in H^2(]0,1[)$ et calculer u''. On a $C_c^\infty(]0,1[) \subset H^1(]0,1[)$. On peut donc prendre $v = \phi \in C_c^\infty(]0,1[)$ dans (3.3.27). On a donc

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[),\quad \int_0^1 u'\phi' + \frac{1}{2}\int_0^1 u\phi = \int_0^1 f\phi$$

ou encore

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[),\quad \int_0^1 u'\phi' = -\frac{1}{2}\int_0^1 u\phi + \int_0^1 f\phi = \int_0^1 (f - \frac{1}{2}u)\phi \tag{3.3.29}$$

Ici $u' \in L^2(]0,1[)$ et $f - \frac{1}{2}u \in L^2(]0,1[)$. Par la définition (3.12) de l'espace de Sobolev $H^1(]0,1[)$, on en déduit que

$$u' \in H^1(]0,1[) \text{ et } (u')' = \frac{1}{2}u - f. \tag{3.3.30}$$

Par la définition (3.19) de $H^2(]0,1[)$, comme $u \in H^1(]0,1[)$, on conclut que $u \in H^2(]0,1[)$ et $u'' = \frac{1}{2}u - f$ dans $L^2(]0,1[)$ et p.p., ce qui prouve (i).

(ii) Cette partie n'est pas similaire au cas précédent car, comme déjà écrit, il n'y a pas de conditions aux limites incluses dans la définition de $H = H^1(]0,1[)$.
Rappelons que u vérifie

$$\forall v \in H^1(]0,1[),\quad \int_0^1 u'v' + \frac{1}{2}\int_0^1 uv = \int_0^1 fv \tag{3.3.31}$$

Comme $u \in H^2(]0,1[)$, en appliquant la formule d'intégration par partie à u' et v (corollaire 3.16), on a

$$\forall v \in H^1(]0,1[),\quad \int_0^1 u'v' = -\int_0^1 u''v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0).$$

Donc en revenant à (3.3.31)

$$\forall v \in H^1(]0,1[), \quad -\int_0^1 u''v + \frac{1}{2}\int_0^1 uv + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = \int_0^1 fv$$

ou encore

$$\forall v \in H^1(]0,1[), \quad \int_0^1 (-u'' + \frac{1}{2}u - f)v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0. \tag{3.3.32}$$

Par l'étape (i), on sait que $u'' = \frac{1}{2}u - f$ dans $L^2(]0,1[)$ et p.p. L'intégrale dans (3.3.32) est donc nulle et on a

$$\forall v \in H^1(]0,1[), \quad u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0. \tag{3.3.33}$$

En prenant $v(x) = x$, on en déduit $u'(1) = 0$, et en prenant $v(x) = 1 - x$, on trouve $u'(0) = 0$.

$\square$

Remarque. Comme pour l'exemple 1, on peut montrer que si $f \in C([0,1])$, la solution de la formulation variationnelle (3.3.27) vérifie

$$u \in C^2([0,1]) \text{ et } u''(x) = 2u(x) - f(x) \text{ pour tout } .x \in [0,1]. \tag{3.3.34}$$

Remarques importantes.

(i) Les traitements des conditions aux limites diffèrent dans les deux exemples ci-dessus. Dans l'exemple 1, les conditions apparaissent dans l'espace de la formulation variationnelle. Ce n'est pas le cas dans l'exemple 2. Toutefois, pour l'exemple 2, elles ne sont pas perdues pour autant puisqu'on peut montrer que la solution de la formulation variationnelle est dans $H^2(]0,1[)$ et vérifie les conditions de Neumann homogènes (proposition 3.27). L'information sur les conditions aux limites est en quelque sorte "cachée" dans la formulation variationnelle.

(ii) Les problèmes aux limites diffèrent entre eux par l'équation et/ou les conditions aux limites. Chaque problème est spécifique. Le traitement des conditions aux limites est souvent un mélange des exemples 1 et 2. Il va falloir pratiquer grâce à de nombreux exercices.

(iii) Le choix de l'espace de la formulation variationnelle est délicat. Deux remarques très utiles :

- il ne faut *jamais* introduire dans cet espace des conditions aux limites qui ne sont pas présentes dans le problème aux limites à étudier.

- il faut *toujours* se demander si l'espace qu'on introduit a un sens mathématique. Par exemple si $u \in H^1(]0,1[)$, les quantités $u'(0)$ et $u'(1)$ n'ont pas de sens. Introduire un espace consistant de fonctions $H^1(]0,1[)$ satisfaisant les conditions de Neumann serait dons absurde. Dans l'exemple 2, le fait qu'on démontre que $u \in H^2(]0,1[)$ est essentiel pour obtenir dans une *deuxième étape* que $u'(0) = u'(1) = 0$.

Chapitre 4

Topologie faible dans les espaces de Hilbert et les espaces de Banach

La topologie faible est un outil fondamental pour l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Elle n'est pas nécessaire pour les problèmes aux limites du type de ceux que nous venons d'étudier dans le chapitre précédent. Je vais toutefois motiver son introduction en commençant une démonstration du théorème de Lax-Milgram par la méthode de Galerkin (section 4.1). Cette méthode est très importante dans le domaine des équations aux dérivées partielles non linéaires, stationnaires ou d'évolution ; l'étude des formulations variationnelles linéaires faite ici permet d'appréhender plusieurs aspects de la méthode. Nous verrons que la démonstration repose sur des arguments de compacité. La topologie faible permet en effet d'avoir des résultats de compacité dans des espaces de dimension infinie. Elle sera aussi utilisée dans le chapitre suivant consacré à l'optimisation (théorème 5.5).

La topologie faible est présentée dans la section 4.2 dans le cas des espaces de Hilbert. Ce cas, très important dans les applications, permet aussi des démonstrations assez élémentaires.

Puis dans la section 4.3 on conclura la démonstration du théorème de Lax-Milgram.

Enfin la dernière section 4.4 présente des résultats concernant les espaces de Banach.

4.1 Démonstration du théorème de Lax-Milgram dans les espaces séparables. Méthode de Galerkin.

On se donne :

- un espace de Hilbert H séparable ;
- une application $a : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire, continue, coercive ;
- une application $L \in H'$.

C'est le cadre théorique du théorème de Lax-Milgram sauf que l'espace de Hilbert H est supposé de plus séparable. Ce n'est pas une restriction dans les applications car les espaces de Sobolev sont séparables.

On se propose de démontrer par la méthode de Galerkin que le problème

$$(P) \qquad \begin{cases} u \in H, \\ \forall\, v \in H, \quad a(u,v) = L(v) \end{cases}$$

a une unique solution. Cette méthode consiste à introduire un problème en dimension finie et à passer ensuite à la limite au sens de la topologie faible.

Etape 1 : introduction d'un problème en dimension finie

L'espace H, séparable, possède une base hilbertienne $(e_n)_n$. Pour $m \geq 1$, on introduit les sous-espaces de dimension finie de H donnés par $H_m = \text{Vect }\{e_1, ., , , , e_m\}$. Alors

- $H_m \subset H_{m+1}$;
- $H = \overline{\cup_m H_m}$;
- dim $H_m = m$.

Ensuite, pour $m \geq 1$ on considère le problème

$$(P_m) \qquad \text{Trouver } \ u_m \in H_m \ \text{ tel que } \ \forall v \ \in H_m, \quad a(u_m, v) = L(v).$$

La seule différence entre (P) et (P_m) est que (P_m) est posé dans un espace de dimension finie. Des arguments propres à la dimension finie vont nous permettre de résoudre (P_m).

Lemme 4.1 *Le problème (P_m) possède une unique solution.*

Démonstration. Le problème (P_m) est équivalent à un système linéaire de m équations à m inconnues. En effet, en utilisant la base $\{e_1, ., , , , e_m\}$ de H_m et la bilinéarité de a, on a :

$$(P_m) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_m \in H_m \\ a(u_m, e_i) = L(e_i), \quad \forall\, i = 1, ..., m \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists\, \xi_j, 1 \leq j \leq m, \ \ u_m = \sum_{j=1}^m \xi_j e_j \\ \sum_{j=1}^m a(e_j, e_i)\xi_j = L(e_i), \quad \forall\, i = 1, ..., m. \end{array} \right.$$

Soit A la matrice carrée d'ordre m de terme général $a_{ij} = a(e_j, e_i)$. Le système linéaire ci-dessus a pour matrice A. Le système linéaire (et donc le problème (P_m)) a une unique solution si et seulement si A est inversible. Pour prouver que A est inversible, il suffit de démontrer que $A\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0$.

$$A\xi = 0 \Leftrightarrow \forall i, \quad \sum_{j=1}^{m} a(e_j, e_i)\xi_j = 0 \ \Leftrightarrow \forall i, \ \ a\left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j, e_i\right) = 0.$$

Ceci entraîne :

$$a\left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j, \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j\right) = 0.$$

Par la coercivité de a, on en déduit

$$\alpha \| \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \|^2 \leq 0$$

et comme $\alpha \| \sum_{j=1}^m \xi_j e_j \|^2 \geq 0$, on conclut que

$$\alpha \| \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \|^2 = 0$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j = 0 \ \Rightarrow \forall\, j, \ \xi_j = 0.$$

On a donc $A\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0$ et A est inversible.

$\square$

Etape 2 : Estimation a priori sur la suite u_m

Une estimation a priori est une majoration d'une norme d'une solution ne dépendant que des données (ici a et L). Dans notre problème il y a une seule norme (celle de H), mais en général on peut avoir besoin d'estimations pour différentes normes. Pour obtenir des estimations on choisit une fonctions test adaptée dans la formulation variationnelle.

Ici on prend $v = u_m$ dans la formulation variationnelle du problème (P_m). Cela donne :

$$a(u_m, u_m) = L(u_m).$$

Puis en utilisant la coercivité de a et la continuité de L :

$$\alpha\|u_m\|^2 \leq a(u_m, u_m) = L(u_m) \leq \|L\|_{H'}\|u_m\|$$

Si $\|u_m\| > 0$, on peut simplifier par $\|u_m\|$ et on obtient $\|u_m\| \leq \frac{\|L\|_{H'}}{\alpha}$. On note que l'inégalité est encore vrais si $\|u_m\| = 0$. La suite $(u_m)_m$ est donc bornée indépendamment de m dans H. Plus précisément :

$$\forall m, \ \|u_m\| \leq \frac{\|L\|_{H'}}{\alpha} \tag{4.1.1}$$

Etape 3 : Extraction d'une sous-suite convergeante et passage à la limite

Une façon commode d'extraire des sous-suites convergeantes est d'avoir des propriétés de compacité.

Rappels et compléments sur la compacité

I. Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$.
a. On dit que $a \in K$ est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ d'éléments de K si on peut en extraire une sous-suite convergeant vers a.
b. K est compact si toute suite de points de K possède au moins une valeur d'adhérence dans K.
c. Soit K compact. Si une suite $(u_n)_n$ d'éléments de K a une unique valeur d'adhérence, alors la suite converge vers cette valeur.

II. Les propriétés ci-dessus se généralisent au cas où (K, d) est un espace métrique. On appelle espace métrique tout couple constitué par un ensemble K et une application $(u, v) \to d(u, v)$, dite distance, de $K \times K$ dans $\mathbb{R}^+$ ayant les propriétés suivantes :

- $u = v \Leftrightarrow d(u, v) = 0$
- $d(u, v) = d(v, u)$
- $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

(Dans un espace vectoriel normé, les propriétés ci-dessus sont satisfaites par $d(u, v) = \|u - v\|$). On dit qu'une suite $(u_n)_n$ d'un espace métrique (K, d) converge vers a si $d(u_n, a) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Les résultats du I sur la compacité s'étendent alors de façon immédiate.

Ici, à l'issue de l'étape 2, $\forall m, \ u_m \in B(0, R) = \{v \in H, \|v\| \leq R\}$ avec $R = \|L\|_{H'}/\alpha$. Or on peut montrer que la boule fermée $B(0, R)$ est compacte si et seulement si H est un espace vectoriel de dimension finie (exercice). On va donc chercher une autre topologie qui va faire des boules fermées, des ensembles compacts.

4.2 Topologie faible dans les espaces de Hilbert

Soient H un espace de Hilbert et H' son espace dual.

Définition 4.2 *Soit $(u_n)_n$ une suite de H. On dit que u_n tend vers $u \in H$ au sens de la topologie faible si*

$$\forall L \in H', \;\; L(u_n) \to L(u) \;\text{ quand }\; n \to +\infty.$$

On note $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$. Si une telle limite faible u existe, alors elle est uniquement définie.

Justification de la définition 4.2. Il faut montrer que si une limite faible existe alors elle est unique. Supposons que $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ et $u_n \rightharpoonup v$ quand $n \to +\infty$. Pour tout $f \in H$, l'application $w \to (w, f)$ étant un élément de H', on a nécessairement $(u_n, f) \to (u, f)$ quand $n \to +\infty$ et $(u_n, f) \to (v, f)$ quand $n \to +\infty$. Par unicité de la limite (dans $\mathbb{R}$), $\forall f \in H, \; (u, f) = (v, f)$, ou $(u - v, f) = 0$. Pour $f = u - v$ cela donne $\|u - v\|^2 = 0$ et donc $u = v$.

□

On a dorénavant **deux notions de convergence des suites** :

- $u_n \to u$ quand $n \to +\infty$ si $\|u_n - u\| \to 0$ quand $n \to +\infty$; on dit qu'il y a **convergence forte** ou que la suite **converge fortement**
- $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$; on dit qu'il y a **convergence faible** ou que la suite **converge faiblement**.

Les deux notions de convergence coïncident dans les espaces de dimension finie (exercice).

La convergence forte entraîne la convergence faible comme énoncé dans la proposition suivante, qui donne d'autres premières propriétés.

Proposition 4.3 *Soit $(u_n)_n$ une suite de H. On a :*
(i) Si $u_n \to u$ quand $n \to +\infty$ fortement, alors $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ faiblement.
(ii) $u_n \rightharpoonup u$ faiblement quand $n \to +\infty \Leftrightarrow \forall f \in H$, $(u_n, f) \to (u, f)$ quand $n \to +\infty$.
(iii) Si $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ faiblement, alors la suite $(\|u_n\|)_n$ est bornée :

$$\exists\, R > 0, \; \forall n, \; \|u_n\| \leq R.$$

(iv) Si $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ faiblement et $L_n \to L$ quand $n \to +\infty$ dans H' fortement, alors $L_n(u_n) \to L(u)$ quand $n \to +\infty$.

Démonstration.
(i) Continuité de $L \in H'$
(ii) Conséquence du théorème de Riesz (théorème 1.9).
(iii) Admis
(iv) On a les majorations suivantes :

$$|L_n(u_n) - L(u)| \leq |(L_n - L)(u_n) + L(u_n - u)| \leq \|L_n - L\|_{H'} \|u_n\| + |L(u_n - u)|$$

Par (ii) la suite $(\|u_n\|)_n$ est bornée, d'où

$$|L_n(u_n) - L(u)| \leq \|L_n - L\|_{H'} R + |L(u_n - u)|$$

Chacun des deux termes à droite de l'inégalité tend vers 0 quand $n \to +\infty$, d'où le résultat.

□

Une propriété dans $H^1(I)$. Soit $(u_n)_n$ une suite de $H^1(I)$ convergeant faiblement vers $u \in H^1(I)$ (I est un intervalle de $\mathbb{R}$). Alors $\forall \alpha \in \bar{I}$ on a $u_n(\alpha) \to u(\alpha)$ quand $n \to +\infty$.

La proposition suivante donne des critères pour démontrer qu'une suite est faiblement convergente.

Proposition 4.4 *Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de H. Alors*
(i) $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ faiblement $\Leftrightarrow \forall f \in F$, $(u_n, f) \to (u, f)$ quand $n \to +\infty$ où $F \subset H$ vérifie $\bar{F} = H$.
(ii) On suppose H séparable de base hilbertienne $(e_p)_p$, $p \geq 1$. Alors

$$u_n \rightharpoonup u \text{ quand } n \to +\infty \text{ faiblement } \Leftrightarrow \forall p \geq 1,\ (u_n, e_p) \to (u, e_p) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Démonstration.
Les deux implications $\Rightarrow$ sont évidentes. Montrons les réciproques.
(i) Par hypothèse, il existe une constante $R > 0$ telle que, $\forall n$, $\|u_n\| \leq R$ et $\|u\| \leq R$. Soit $v \in H$. Par densité de F dans H, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $f \in F$ tel que $\|v - f\| \leq \epsilon$. Alors

$$|(u_n - u, v)| \leq |(u_n - u, v - f)| + |(u_n - u, f)| \leq 2R\epsilon + |(u_n - u, f)| \leq 4R\epsilon$$

pour n assez grand. On a donc bien $(u_n, f) \to (u, f)$ quand $n \to +\infty$, et la convergence faible de $(u_n)_n$.
(ii) Soit F l'espace vectoriel engendré par les (e_p) (voir (1.3.1)). Clairement, $\forall f \in F$, on a $(u_n, f) \to (u, f)$ quand $n \to +\infty$. L'argument du (i) montre que $\forall f \in \bar{F}$, on a $(u_n, f) \to (u, f)$ quand $n \to +\infty$. Comme $\bar{F} = H$, cela prouve la convergence faible de $(u_n)_n$.

□

Suites bornées

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 4.5 *Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de H. Alors on peut en extraire une sous-suite convergeante au sens de la topologie faible.*

Démonstration.
Pour démontrer ce résultat on va décomposer sur une base hilbertienne et travailler avec les coefficients. Comme H n'est pas supposé séparable, on introduit d'abord un espace séparable bien choisi M. Pour cela soit F l'espace vectoriel engendré par les u_n. On pose $M = \bar{F}$. L'espace M est séparable et possède une base hilbertienne $(e_p)_p$.

On travaille d'abord avec le premier coefficient (u_n, e_1). La suite $((u_n, e_1))_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$,. On peut donc extraire une sous-suite $(u_{\varphi_1(n)})_n$ telle que $(u_{\varphi_1(n)}, e_1)$ soit convergeante.

On considère ensuite le second coefficient pour la suite qui vient d'être extraite. La suite $(u_{\varphi_1(n)}, e_2)$ est bornée dans $\mathbb{R}$. On peut donc extraire une sous-suite $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})_n$ telle que $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}, e_2)$ convergeante. On note que, pour cette suite extraite, on a aussi $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}, e_1)$ convergeante.

On procède ensuite de proche en proche par récurrence. A l'étape k, on extrait une suite $(u_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k(n)})_n$ telle que $(u_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k(n)}, e_k)$ est convergeante. La construction fait que $(u_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k(n)}, e_l)$ converge pour $l < k$.

On considère alors la "suite diagonale" $(w_l)_l$ avec $w_l = u_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_l(l)}$. Par construction, $\forall k \geq 1$, la suite $(w_l, e_k)_l$ a une limite a_k quand $l \to +\infty$.

On va montrer que les a_k sont les coefficients de Fourier d'un élément de M. On a

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 = \lim_{l \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} (w_l, e_k)^2.$$

Or $\forall k$

$$\sum_{k=1}^{N} (w_l, e_k)^2 \leq \|w_l\|^2 \leq R^2$$

où $\forall n, \|u_n\| \leq R$ (la suite $(u_n)_n$ est supposée bornée). Donc

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \leq R^2$$

ce qui entraîne que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ converge. Grâce au théorème 1.11, on peut donc définir

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k.$$

On a $a \in M$ et $(a, e_k) = a_k$.

On a donc $\forall k, \quad (w_l, e_k) \to (a, e_k) \quad$ quand $\quad l \to +\infty$. Par la proposition 4.4, on en déduit que $\forall f \in M, \quad (w_l, f) \to (a, f) \quad$ quand $\quad l \to +\infty$.

Comme $H = M \oplus M^{\perp}$ (corollaire 1.8) on conclut que $\forall f \in H, \ (w_l, f) \to (a, f) \quad$ quand $\quad l \to +\infty$ (à expliciter), ce qui entraîne la convergence faible de $(w_l)_l$ vers a.

□

Théorème 4.6 *Soit H un espace de Hilbert séparable. Alors, $\forall R > 0$, la boule fermée*

$$B(0, R) = \{u \in H, \|u\| \leq R\}$$

munie de la topologie faible, est un espace métrique compact.

Par le théorème 4.5, de toute suite de $B(0, R)$ on peut extraire une sous-suite faiblement convergente. Dans un espace métrique. cette propriété peut être une définition de la compacité. Mais la topologie faible n'est pas une topologie d'espace métrique. Toutefois si H est séparable on peut montrer que la topologie faible restreinte aux boules peut être associée à une distance, d'où l'énoncé du théorème 4.6. Ceci dépasse le cadre de ce cours.

Applications linéaires

Une application **linéaire** continue entre deux espaces de Hilbert reste continue quand on munit ceux-ci de leurs topologies faibles respectives, comme énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 4.7 *Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert. Soit T une application linéaire et continue de H_1 dans H_2. Alors si $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ dans H_1 faible, on a $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ quand $n \to +\infty$ dans H_2 faible.*

Démonstration. Soit $L \in H_2'$. On a $L(T(u_n)) = (L \circ T)(u_n) \to (L \circ T)(u) = L(T(u))$ quand $n \to \infty$ car $L \circ T \in H_1'$.

□

Topologie faible et opérateurs compacts

Soient E, F deux espaces de Banach. On note $B_E =$ boule unité fermée de $E = \{u \in E, \|u\| \leq 1\}$.

Définition 4.8 *On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}C(E,F)$ (application linéaire continue de E dans F) est compact si l'ensemble $T(B_E)$ est relativement compact dans F, c'est-à-dire si*

$$\exists\, C \subset F,\ C \text{ compact tel que } T(B_E) \subset C \Leftrightarrow \overline{T(B_E)} \text{ compact de } F.$$

On note $\mathcal{K}(E,F) = \{$ opérateurs compacts $E \to F\}$.

$T \in \mathcal{L}C(E,F)$ est compact $\Leftrightarrow \forall \mathcal{B} \subset E$ fermé borné, $T(\mathcal{B})$ est relativement compact.

Proposition 4.9 *$\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.*

Démonstration. Cela résulte facilement de $(T_1+T_2)(B_E) \subset T_1(B_E)+T_2(B_E) \subset \overline{T_1(B_E)}+\overline{T_2(B_E)}$. □

Une opérateur compact entre deux espaces de Hilbert transforme une suite faiblement convergente en une suite fortement convergeante, comme énoncé dans la proposition suivante. C'est un résultat fondamental.

Proposition 4.10 *Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert, $T \in \mathcal{K}(H_1,H_2)$. Si $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ dans H_1 faible, alors $T(u_n) \to T(u)$ quand $n \to +\infty$ dans H_2 fort.*

Démonstration. On commence par remarquer qu'il y a convergence faible de la suite $(T(u_n))_n$. En effet, par la proposition 4.7, on a $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ quand $n \to +\infty$ dans H_2 faible.

Comme la suite $(u_n)_n$ est faiblement convergeante, elle est bornée : $\exists R > 0, \forall n, \|u_n\| \leq R$. On a donc $T(u_n) \in \overline{T(B(0,R))}$ compact de H_2 (comme T est compact).

On va montrer que la suite $(T(u_n))_n$ admet une unique valeur d'adhérence. Soit l valeur d'adhérence de $T(u_n)$. Il existe une sous-suite telle que $T(u_{\varphi(n)}) \to l$ quand $n \to +\infty$ fort. Alors $T(u_{\varphi(n)}) \to l$ quand $n \to +\infty$ faible. Mais, $T(u_{\varphi(n)}) \rightharpoonup T(u)$ faiblement quand $n \to +\infty$. Par unicité de la limite faible, on a $l = T(u)$.

La suite $(T(u_n))_n$ appartient à un compact et admet $T(u)$ comme unique valeur d'adhérence donc $T(u_n) \to T(u)$ fortement quand $n \to +\infty$. □

Exemple fondamental

Théorème 4.11 *(théorème de Rellich) Si I est borné, l'injection de $H^1(I)$ dans $L^2(I)$ est compacte.*

Conséquence. Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de $H^1(I)$ où I est un intervalle borné. Alors il existe une sous-suite $u_{\varphi(n)}$ et $u \in H^1(I)$ tels que, quand $n \to +\infty$,

- $u_{\varphi(n)} \rightharpoonup u$ dans $H^1(I)$ faible
- $u_{\varphi(n)} \to u$ dans $L^2(I)$ fort.

4.3 Retour à la démonstration du théorème de Lax-Milgram

Etape 3 : Extraction d'une sous-suite convergeante et passage à la limite

On rappelle que u_m est l'unique solution du problème (P_m) (étape 1). Puis dans l'étape 2 on a montré qu'il existe $R > 0$ tel que $\forall m, \|u_m\| \leq R$ (voir (4.1.1)).

Par le théorème 4.4, on peut donc extraire une sous-suite $(u_{\varphi(m)})_m$ telle qu'il existe $u \in H$ et $u_{\varphi(m)} \rightharpoonup u$ quand $m \to +\infty$ dans H faible (l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante).

Montrons que u est solution de (P). La formulation variationnelle de $u_{\varphi(m)}$ s'écrit

$$\forall v \in H_{\varphi(m)}, \quad a(u_{\varphi(m)}, v) = L(v).$$

Attention : l'espace de la formulation variationnelle dépend de m, d'où les précautions qui suivent. *Soit m_0 fixé.* $\forall m \geq m_0$, $H_{\varphi(m_0)} \subset H_{\varphi(m)}$, donc pour $v \in H_{\varphi(m_0)}$ fixé,

$$\forall m \geq m_0,\ a(u_{\varphi(m)}, v) = L(v). \tag{4.3.2}$$

On se propose maintenant de passer quand $m \to +\infty$ dans (4.3.2). Par définition de la topologie faible et continuité de l'application linéaire $w \to a(w, v)$, on a

$$a(u_{\varphi(m)}, v) \to a(u, v) \text{ quand } m \to +\infty$$

On déduit donc de (4.3.2) que

$$a(u, v) = L(v). \tag{4.3.3}$$

(4.3.3) est vérifié pour tout v dans $H_{\varphi(m_0)}$. *L'indice m_0 étant quelconque*, on a :

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \cup_m H_{\varphi(m)}.$$

Par *continuité* de l'application linéaire $w \to a(u, w)$, on en déduit :

$$\forall v \in \overline{\cup_m H_{\varphi(m)}}, \quad a(u, v) = L(v).$$

Comme $\overline{\cup_m H_{\varphi(m)}} = H$ on a finalement

$$\forall v \in H, \quad a(u, v) = L(v)$$

et u est solution de la formulation variationnelle (P).

Etape 4 : Unicité d'une solution

Il reste à montrer l'unicité d'une solution de (P). Supposons que u_1 et u_2 soient deux solutions de (P). On a

$$\forall v \in H, \quad a(u_1, v) = L(v),$$
$$\forall v \in H, \quad a(u_2, v) = L(v).$$

En soustrayant les deux formulations on obtient que

$$\forall v \in H,\ a(u_1 - u_2, v) = 0 \tag{4.3.4}$$

En prenant $v = u_1 - u_2$ dans (4.3.4), il vient $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$ et en utilisant la coercivité de a :

$$\alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$$

Comme $\alpha\|u_1 - u_2\|^2 \geq 0$, on en déduit $\alpha\|u_1 - u_2\|^2 = 0$ et $u_1 = u_2$.

$\square$

Convergence forte

On va montrer que la suite entière des approximations de Galerkin $(u_m)_m$ converge fortement vers l'unique solution de (P). Ce résultat est important du point de vue de l'approximation numérique car la méthode de Galerkin où on introduit un problème en dimension finie est à la base de nombreuses méthodes numériques, en particulier de la méthode des éléments finis.

Il est rare qu'on puisse démontrer ainsi la convergence forte. C'est dû à des propriétés très particulières. Il est impossible de démontrer directement que $\|u_m - u\| \to 0$ quand $m \to +\infty$. On va passer à la limite dans une quantité étroitement liée aux formulations variationnelles (qui est $a(u - u_m, u - u_m)$).

Proposition 4.12 *Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram (avec H séparable), on a $u_m \to u$ quand $m \to +\infty$ dans H fort.*

Démonstration.
(i) On commence par remarquer que la suite $(u_m)_m$ toute entière converge faiblement vers u quand $m \to +\infty$.

En effet, la suite $(u_m)_m$ est bornée donc appartient à un compact pour la topologie faible. Montrons qu'elle admet une unique valeur d'adhérence. Soit l une valeur d'adhérence. Il existe une sous-suite $(u_{\psi(m)})_m$ telle que $u_{\psi(m)} \rightharpoonup l$ quand $m \to +\infty$ dans H faible. Exactement comme ci-dessus pour la suite $(u_{\varphi(m)})_m$, on montre que l est solution de (P). Dans l'étape 4 on a prouvé que (P) possède une unique solution u. On a donc $l = u$.

La suite $(u_m)_m$ étant dans un compact et ayant une unique valeur d'adhérence u (pour la topologie faible), on a que $u_m \rightharpoonup u$ dans H faible quand $m \to +\infty$.

(ii) Il reste à montrer la convergence forte. On a

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H \tag{4.3.5}$$

$$a(u_m, v) = L(v), \quad \forall v \in H_m. \tag{4.3.6}$$

Attention : les espaces pour les deux formulations variationnelles sont différents. Mais on peut prendre $v \in H_m$ pour (4.3.5) **et** (4.3.6). En soustrayant les relations on trouve que

$$\forall v \in H_m, \quad a(u - u_m, v) = 0 \tag{4.3.7}$$

C'est la propriété qui va permettre de conclure. On a

$$a(u - u_m, u - u_m) = a(u - u_m, u) - a(u - u_m, u_m)$$

En prenant $v = u_m$ dans (4.3.7), on a $a(u - u_m, u_m) = 0$ et donc :

$$a(u - u_m, u - u_m) = a(u - u_m, u) \tag{4.3.8}$$

Comme l'application $w \to a(w, u)$ est linéaire continue et que $u_m - u \rightharpoonup 0$ dans H faible quand $m \to +\infty$, on conclut que

$$a(u - u_m, u - u_m) = a(u - u_m, u) \to 0 \quad \text{quand} \quad m \to +\infty.$$

Donc, comme $\alpha\|u - u_m\|^2 \leq a(u - u_m, u - u_m)$, $u_m \to u$ quand $m \to +\infty$ dans H fort.

$\square$

Remarque. La simplification dans (4.3.8) est essentielle. On *ne peut pas* passer à la limite par convergence faible dans le terme $a(u_m, u_m)$.

La proposition 4.12 donne un résultat de convergence. L'étape suivante serait d'obtenir des estimations d'erreur. Là aussi (4.3.7) joue un rôle fondamental.

4.4 Topologie faible dans les espaces de Banach

4.4.1 Topologie faible

Soit E un espace de Banach (c'est-à-dire espace vectoriel normé complet) de norme $\|.\|$. Le dual E' muni de la norme :

$$\|L\|_{E'} = \sup_{v\neq 0} \frac{|L(v)|}{\|v\|}$$

est un espace de Banach.

Définition 4.13 *Soit $(u_n)_n$ une suite de E. On dit que u_n tend vers $u \in E$ au sens de la topologie faible si*

$$\forall L \in E', \;\; L(u_n) \to L(u) \;\text{ quand }\; n \to +\infty.$$

On note $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$. Si une telle limite faible u existe, alors elle est uniquement définie.

Proposition 4.14 *Soit $(u_n)_n$ une suite de E. On a :*
(i) Si $\|u_n - u\| \to 0$ quand $n \to +\infty$, alors $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ faiblement.
(ii) Si $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ faiblement, alors la suite $\|u_n\|$ est bornée :

$$\exists\, R > 0, \forall n, \; \|u_n\| \leq R.$$

(iii) Si $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ faiblement et $L_n \to L$ quand $n \to +\infty$ dans E', alors $L_n(u_n) \to L(u)$ quand $n \to +\infty$.

Proposition 4.15 *Soient E, F deux espaces de Banach. Soit T une application linéaire et continue de E dans F. Alors si $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ dans E faible, on a $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ quand $n \to +\infty$ dans F faible.*

Proposition 4.16 *Soient E, F deux espaces de Banach, $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Si $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ dans E faible, alors $T(u_n) \to T(u)$ quand $n \to +\infty$ dans F fort.*

Suites bornées

L'espace E' admet lui-aussi un dual noté E'' et appelé bidual de E. On a une injection $J : E \to E''$ définie comme suit. Soit $u \in E$ fixé ; alors l'application $L \mapsto < L, u >$ de E' dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur E' c'est-à-dire un élément de E''.

Définition 4.17 *Soit E un espace de Banach. On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$.*

Tout espace de Hilbert est réflexif.

Définition 4.18 *Soit E un espace de Banach. On dit que E est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Théorème 4.19 *Soit E un espace de Banach séparable et réflexif. Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de E. Alors on peut en extraire une sous-suite convergeante au sens de la topologie faible.*
Pour tout $R > 0$, la boule fermée

$$B(0, R) = \{u \in H, \|u\| \leq R\}$$

munie de la topologie faible, est un espace métrique compact.

Exemple

Théorème 4.20 *Pour $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif.*

Pour $1 < p < \infty$, le théorème 4.19 s'applique à $L^p(\Omega)$. Soit $\tilde{u}_n$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$; alors il existe une sous-suite $\tilde{u}_{\varphi(n)}$ et $\tilde{u} \in L^p(\Omega)$ telles que, quand $n \to +\infty$:

$$\forall\ \tilde{f} \in L^{p'}(\Omega),\ \int_\Omega u_{\varphi(n)} f \to \int_\Omega uf$$

4.4.2 Topologie faible étoile.

Soit E un espace de Banach, soit E' son dual (muni de la norme $\|.\|_{E'}$).

Définition 4.21 *Soit $(L_n)_n$ une suite de E'. On dit que L_n tend vers $L \in E'$ au sens de la topologie faible $*$ si*

$$\forall\ u \in E,\ \ L_n(u) \to L(u) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Si une telle limite faible $*$ existe, alors elle est uniquement définie.

Théorème 4.22 *Soit E un espace de Banach séparable et $(L_n)_n$ une suite bornée de E'. Alors on peut en extraire une sous-suite convergeante au sens de la topologie faible $*$.*

Comme $L^1(\Omega)$ est séparable, le théorème 4.22 s'applique à $L^\infty(\Omega)$. Soit $\tilde{u}_n$ une suite bornée de $L^\infty(\Omega)$; alors il existe une sous-suite $\tilde{u}_{\varphi(n)}$ et $\tilde{u} \in L^\infty(\Omega)$ telles que

$$\forall\ \tilde{f} \in L^1(\Omega),\ \int_\Omega u_{\varphi(n)} f \to \int_\Omega uf$$

quand $n \to +\infty$.

Chapitre 5

Optimisation dans les espaces de Hilbert

5.1 Minimisation de fonctionnelles convexes

5.1.1 Fonctionnelles convexes.

Soit E un espace vectoriel normé de norme $\|.\|$ et $J : E \to \mathbb{R}$.

On dit qu'un ensemble $K \subset E$ est *convexe* si

$$\forall\ (u,v) \in K^2, \forall\ t \in [0,1],\ tu + (1-t)v \in K.$$

On dit qu'une application J définie sur un ensemble convexe non vide K et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est *convexe* sur K si

$$\forall\ (u,v) \in K^2,\ \forall\ t \in [0,1],\ J(tu + (1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v). \tag{5.1.1}$$

On dit qu'une application J définie sur un ensemble convexe non vide K et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est *strictement convexe* sur K si

$$\forall\ (u,v) \in K^2,\ u \neq v,\ \forall\ t \in]0,1[,\ J(tu + (1-t)v) < tJ(u) + (1-t)J(v). \tag{5.1.2}$$

Exemple.

Proposition 5.1 *Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $v \in H^1(]a,b[)$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$, on peut définir*

$$J(v) = \int_a^b g(v(x))dx. \tag{5.1.3}$$

Si de plus g est convexe sur $\mathbb{R}$, alors J est convexe sur $H^1(]a,b[)$.

Démonstration. Si $v \in H^1(]a,b[)$, alors v est continue sur $[a,b]$. Comme g est continue, $g \circ v$ est aussi continue sur $[a,b]$ et l'intégrale dans (5.1.3) est bien définie.

Supposons maintenant g convexe. Soient $(u,v) \in H^1(]0,1[)^2$ et $t \in [0,1]$. Alors

$$J(tu + (1-t)v) = \int_a^b g(tu(x) + (1-t)v(x))dx. \tag{5.1.4}$$

Par convexité de g, pour tout $x \in [a,b]$:

$$g(tu(x) + (1-t)v(x)) \leq tg(u(x)) + (1-t)g(v(x)).$$

En revenant à (5.1.4), on en déduit

$$J(tu + (1-t)v) \leq t \int_a^b g(u(x))dx + (1-t) \int_a^b g(v(x))dx = tJ(u) + (1-t)J(v),$$

d'où la convexité de J.

$\square$

Remarque. Dans (5.1.3), l'argument de J est une fonction. On donne donc le nom de fonctionnelle à J (et non de fonction définie sur un espace de fonctions...)

5.1.2 Convexité et topologie faible

On étudie des propriétés de la topologie faible qui concernent les ensembles et les fonctions convexes. Elles joueront un rôle essentiel pour établir l'existence de minimum globaux.

Ensemble convexes

Soit H un espace de Hilbert et un ensemble fermé $F \subset H$ non vide (pour la topologie forte associée à la norme). Par définition d'un ensemble fermé, si $(u_n)_n$ est une suite d'éléments de F convergeant dans H fort, sa limite appartient à F. Si la suite n'est que faiblement convergente, la limite ne sera pas dans F a priori. Toutefois cette propriété est satisfaite si F est de plus convexe.

Théorème 5.2 *Soit H un espace de Hilbert et $K \subset H$ un ensemble convexe fermé non vide. Soit $u_n \in K$ telle que $\exists u \in H,\ \ u_n \rightharpoonup u$ dans H faible quand $n \to +\infty$. Alors $u \in K$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on suppose que $u \notin K$. Le résultat est une conséquence du lemme suivant qui est un lemme de séparation, par un hyperplan entre un point et un ensemble convexe fermé non vide.

Lemme 5.3 *Soit H un espace de Hilbert. Soient $K \subset H$ un ensemble convexe fermé non vide et soit $u \notin K$. Alors il existe $L \in H'$ et un réel α tels que*

$$\forall v \in K, \quad L(u) < \alpha < L(v). \tag{5.1.5}$$

Supposons le lemme démontré. Pour la forme linéaire continue donnée par le lemme 5.3, comme $u_n \in K$, on a

$$\forall n, \quad L(u) < \alpha < L(u_n)$$

ce qui est en contradiction avec $L(u) = \lim_{n\to+\infty} L(u_n)$ comme $u_n \rightharpoonup u$ dans H faible.

Il reste à démontrer le lemme 5.3. Comme K est convexe fermé non vide on dispose de la projection sur K, P_K, donnée par le théorème 1.5. Par le théorème 1.6, on sait que

$$\forall v \in K,\ (u - P_K(u), v - P_K(u)) \leq 0. \tag{5.1.6}$$

Considérons

$$T(v) = (P_K(u) - u, v - u)$$

convient. En effet $T(u) = 0$. Ensuite, pour tout $v \in K$

$$T(v) = (P_K(u) - u, v - P_K(u)) + (P_K(u) - u, P_K(u) - u)$$

et grâce à (5.1.6)

$$T(v) \geq \|P_K(u) - u\|^2.$$

Ainsi $L(v) = (P_K(u) - u, v)$ convient pour obtenir (5.1.5) avec $\alpha = \frac{\|P_K(u)-u\|^2}{2} + (P_K(u) - u, u)$.

$\square$

Fonctions convexes

Pour énoncer le résultat relatif aux fonctions convexes et à la topologie faible, nous avons besoin de la notion de limite inférieure d'une suite de réels.

Limites inférieure et supérieure d'une suite de réels.

Soit $(u_n)_n$ une suite d'un espace vectoriel normé général E. Posons $X_n = \{u_k, k \geq n\} \subset E$. On montre facilement que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ est $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{X_n}$. C'est donc un fermé de E. Cet ensemble peut être vide.

Considérons maintenant une suite de réels $(x_n)_n$. Elle possède au moins une valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

On appelle *limite supérieure* de la suite $(x_n)_n$, que l'on note $\limsup_n x_n$, *la plus grande valeur d'adhérence de la suite* $(x_n)_n$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$). On appelle *limite inférieure* de la suite $(x_n)_n$, que l'on note $\liminf_n x_n$, *la plus petite valeur d'adhérence de la suite* $(x_n)_n$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

On peut montrer que

$$\limsup_n x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_n X_n = \inf_n \sup_{k\geq n} x_k, \quad \liminf_n x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_n X_n = \sup_n \inf_{k\geq n} x_k.$$

On donne maintenant quelques propriétés simples des limites supérieures et inférieures.

- La suite $(x_n)_n$ converge (dans $\overline{\mathbb{R}}$) si et seulement $\limsup_n x_n = \liminf_n x_n$.
- La suite de réels $(x_n)_n$ est minorée dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\liminf_n x_n > -\infty$.
- Pour deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$, $\liminf_n(x_n + y_n) \geq \liminf_n x_n + \liminf_n y_n$.

Les propriétés relatives à la limite supérieure s'en déduisent immédiatement comme $\limsup_n x_n = \liminf_n(-x_n)$.

Fonctions convexes et topologie faible.

Soit H un espace de Hilbert et J une fonction continue de H dans $\mathbb{R}$. Par définition de la continuité, si $u_n \to u$ quand $n \to +\infty$ dans H (fort), on a $J(u_n) \to J(u)$ quand $n \to +\infty$. La question est : que peut-on dire si on a seulement $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ dans H faible ? On a une réponse partielle si J est convexe.

Théorème 5.4 *Soit H un espace de Hilbert et $J : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue (pour la topologie usuelle associée à la norme). Si $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ dans H faible, on a*

$$J(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(u_n).$$

Démonstration. Soit

$$\lambda < J(u) \tag{5.1.7}$$

fixé quelconque. Montrons que

$$\exists\, n_0, \quad \forall n \geq n_0, \quad \lambda < J(u_n). \tag{5.1.8}$$

Si l'assertion (5.1.8) est fausse, il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_n$ telle que, pour tout n, $J(u_{\varphi(n)}) \leq \lambda$. Ou encore :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{\varphi(n)} \in \{v \in H, J(v) \leq \lambda\} = K. \tag{5.1.9}$$

Comme J est convexe et continue, l'ensemble K est convexe fermé. Par le théorème 5.2, comme $u_{\varphi(n)} \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ dans H faible, on a $u \in K$, c'est-à-dire $J(u) \leq \lambda$ ce qui est en contradiction avec (5.1.7) et prouve (5.1.8).

Soit maintenant μ une valeur d'adhérence de la suite $(J(u_n))_n$. Par définition, il existe une suite extraite $(J(u_{\psi(n)}))_n$ telle que $J(u_{\psi(n)}) \to \mu$ quand $n \to +\infty$. La propriété (5.1.8) garantit que

$$\exists\, n_1, \quad \forall n \geq n_1, \qquad \lambda < J(u_{\psi(n)}). \tag{5.1.10}$$

En prenant la limite quand $n \to +\infty$ dans (5.1.10), on trouve que $\lambda \leq \mu$. Comme cette propriété est satisfaite pour toute valeur d'adhérence de $(J(u_n))_n$, on a que $\lambda \leq \liminf_n J(u_n)$.

En conclusion, on a montré que, pour tout $\lambda < J(u)$, on a $\lambda \leq \liminf_n J(u_n)$. En prenant la limite $\lambda \to J(u)$, ceci entraîne que $J(u) \leq \liminf_n J(u_n)$.

□

5.1.3 Minimisation de fonctionnelles convexes

Théorème 5.5 *Soit K un ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H et J une fonctionnelle convexe continue de K dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus :*

$$\begin{cases} - \text{ soit } K \text{ est borne} \\ \\ - \text{ soit } K \text{ est non borne et } \lim_{\|v\|\to+\infty,\, v\in K} J(v) = +\infty \end{cases} \tag{5.1.11}$$

Alors, J admet un minimum global sur K en (au moins) un point. Si on suppose de plus J strictement convexe, alors il existe un unique point de minimum global de J sur K.

Démonstration. Sous les hypothèses de ce théorème, la fonctionnelle J n'est a priori pas minorée sur K de sorte que

$$\inf_{v\in K} J(v) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

0n introduit une *suite minimisante*, c'est-à-dire une suite $(u_n)_n$ d'éléments de K telle que

$$J(u_n) \to \inf_{v\in K} J(v) \in [-\infty, +\infty[, \quad \text{quand} \quad n \to +\infty. \tag{5.1.12}$$

La suite $(u_n)_n$ est *bornée*. En effet soit K est borné et c'est évident. Soit K est non borné et J est ∞ à l'∞. Dans ce second cas, fixons $u_0 \in K$. Comme $\lim_{\|v\|\to+\infty,\, v\in K} J(v) = +\infty$, il existe $R > 0$ tel que

$$\forall v \in K \text{ tels que } \|v\| > R, \text{ on a } J(v) > J(u_0) + 1.$$

Alors (5.1.12) entraîne que $\|u_n\| \leq R$ pour n assez grand.

La suite $(u_n)_n$ est bornée dans H qui est un espace de Hilbert. Elle possède donc une *sous-suite faiblement convergente* : il existe $(u_{\varphi(n)})_n$ et $u \in H$ tels que $u_{\varphi(n)} \rightharpoonup u$ quand $n \to +\infty$ dans H faible.

Montrons que *la limite faible u est un point de minimum global de J sur K*. Comme K est convexe fermé, on a

$$u \in K. \tag{5.1.13}$$

Ensuite, J étant convexe continue, on a que :

$$J(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(u_{\varphi(n)}).$$

Or par (5.1.12), la suite toute entière $(J(u_n))_n$ converge vers $\inf_{v\in K} J(v)$. On a donc

$$J(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(u_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} J(u_n) = \inf_{v\in K} J(v).$$

La fonctionnelle J est donc minorée sur K. De plus, comme $u \in K$ par (5.1.13), la borne inférieure de J sur K est atteinte en u et $J(u) = \min_{v\in K} J(v)$.

Il reste à montrer l'unicité d'un point de minimum global si J est de plus strictement convexe. On raisonne par l'absurde. Si le minimum de J est atteint en deux points $u_1 \neq u_2$, on a $\frac{u_1+u_2}{2} \in K$ et

$$J(\frac{u_1+u_2}{2}) < \frac{1}{2}J(u_1) + \frac{1}{2}J(u_2) = \min_{v\in K} J(v)$$

d'où la contradiction.

□

5.2 Conditions d'optimalité

Le résultat d'existence ci-dessus est vrai dans un cadre hilbertien. Les conditions d'optimalité, qui nous intéressent maintenant, peuvent, quant à elles, s'énoncer pour un espace vectoriel normé E général.

5.2.1 Différentiation en dimension quelconque.

Soit E un espace vectoriel normé de norme $\|.\|$.

Définition 5.6 *Soit $J : E \to \mathbb{R}$. On dit que J est différentiable en $u \in E$ s'il existe une application linéaire et continue $L_u : E \to \mathbb{R}$ telle*

$$\forall\, v \in E, \quad J(u+v) = J(u) + L_u(v) + \ \epsilon(v) \quad \text{et} \quad \lim_{\|v\|\to 0} \frac{|\epsilon(v)|}{\|v\|} = 0.$$

Si J est différentiable en u, alors L_u est unique et appelée la différentielle de J au point u ; on la note DJ_u.
On dit que J est différentiable si elle est différentiable en tout point de E.

Propriétés. Si J est différentiable en u alors J est continue en u. De plus

$$DJ_u(v) = \lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \tag{5.2.14}$$

Exemples.

Toute application linéaire continue $L : E \to \mathbb{R}$ est différentiable et, en tout point u, $DL_u = L$.

Proposition 5.7 *Soient E un espace vectoriel normé, $a : E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique continue. Alors $j(v) = \frac{1}{2}a(v,v)$ est différentiable et $Dj_u(v) = a(u,v)$.*

Démonstration. Comme a est continue, il existe une constante $M > 0$ telle que, $\forall (u,v) \in E^2$, $|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$. Soient $u, v \in E$. On a

$$j(u+v) - j(u) = \frac{1}{2}a(u+v, u+v) - \frac{1}{2}a(u,u) = \underbrace{a(u,v)}_{\textit{lineaire continu}} + \underbrace{\frac{1}{2}a(v,v)}_{\textit{reste} : \varepsilon(v)}$$

et

$$\frac{|\varepsilon(v)|}{\|v\|} = \frac{|a(v,v)|}{2\|v\|} \leq \frac{M}{2}\|v\| \to 0 \quad \text{quand } v \to 0$$

j est différentiable au point u et $Dj_u(v) = a(u,v)$.

□

Proposition 5.8 *Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2. Soit la fonctionnelle J définie sur $H^1(]a,b[)$, où $]a,b[$ est un intervalle borné, par*

$$J(v) = \int_a^b g(v(x))dx.$$

Alors J est différentiable sur $H^1(]a,b[)$ et

$$\forall u \in H^1(]a,b[), \quad DJ_u(v) = \int_a^b g'(u(x))v(x)dx \text{ avec } v \in H^1(]a,b[).$$

Démonstration. Soit $u \in H^1(]a,b[)$ et $v \in H^1(]a,b[)$. On a

$$J(u+v) = \int_a^b g(u(x)+v(x))dx.$$

Pour tout $x \in [a,b]$, par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre deux, il existe $\theta(x) \in]0,1[$ qui dépend de $u(x)$ et $v(x)$, tel que

$$g(u(x)+v(x)) = g(u(x)) + g'(u(x))v(x) + \frac{1}{2}g''(u(x)+\theta(x)v(x))v(x)^2.$$

En intégrant sur $[a,b]$, il en résulte

$$J(u+v) = J(u) + \int_a^b g'(u(x))v(x)dx + \frac{1}{2}\int_a^b g''(u(x)+\theta(x)v(x))v(x)^2 dx.$$

Comme $g' \circ u$ est bornée sur $[a,b]$, l'application $v \to \int_a^b g'(u(x))v(x)dx$ est linéaire et continue de $H^1(]a,b[)$ dans $\mathbb{R}$. Ensuite soit

$$\epsilon(v) = \frac{1}{2}\int_a^b g''(u(x)+\theta(x)v(x))v(x)^2 dx. \tag{5.2.15}$$

On veut montrer que

$$\lim_{\|v\|_{H^1(]a,b[)}\to 0} \frac{|\epsilon(v)|}{\|v\|_{H^1(]a,b[)}} = 0. \tag{5.2.16}$$

On peut supposer $\|v\|_{H^1(]a,b[)} \leq R$ où $R > 0$ est un réel quelconque fixé. Alors par l'injection de Sobolev $H^1(]a,b[) \hookrightarrow L^\infty(]a,b[)$, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout v tel que $\|v\|_{H^1(]0,1[)} \leq R$, on a

$$\|v\|_\infty \leq c_1\|v\|_{H^1} \leq c_1 R$$

et comme $0 \leq \theta(x) \leq 1$

$$\|u+\theta v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + c_1 R = \beta$$

En revenant à (5.2.15) on en déduit que, pour tout v tel que $\|v\|_{H^1(]0,1[)} \leq R$:

$$|\epsilon(v)| \leq \frac{1}{2}\max_{|s|\leq\beta}|g''(s)|\int_a^b v(x)^2 dx \leq \frac{1}{2}\max_{[-\beta,\beta]}|g''|\ \|v\|^2_{H^1(]a,b[)}, \tag{5.2.17}$$

ce qui entraîne (5.2.16).

□

Il existe des critères pour étudier si une fonctionnelle J différentiable est convexe ou strictement convexe. Ils sont généralement plus faciles à utiliser que les définitions (5.1.1) et (5.1.2).

Caractérisation des fonctionnelles convexes différentiables

Proposition 5.9 *Soient $J : E \to \mathbb{R}$ différentiable et $K \subset E$ un ensemble convexe non vide. Alors J est convexe sur K si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée*

$$\text{(i)} \qquad \forall\, u \in K, \forall\, v \in K,\ \ J(v) \geq J(u) + DJ_u(v-u)$$

$$\text{(ii)} \qquad \forall\, u \in K, \forall\, v \in K,\ \ (DJ_u - DJ_v)(u-v) \geq 0.$$

Pour $E = \mathbb{R}$, la propriété (i) signifie que la courbe est au-dessus de la tangente. La propriété (ii) est équivalente à la croissance de la fonction dérivée.

Caractérisation des fonctionnelles strictement convexes différentiables

Proposition 5.10 *Soient $J : E \to \mathbb{R}$ différentiable et $K \subset E$ un ensemble convexe non vide. Alors J est strictement convexe sur K si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :*

$$\text{(i)} \qquad \forall\, u \in K, \forall\, v \in K,\ v \neq u,\ \ J(v) > J(u) + DJ_u(v-u)$$

$$\text{(ii)} \qquad \forall\, u \in K, \forall\, v \in K,\ v \neq u,\ \ (DJ_u - DJ_v)(u-v) > 0.$$

Pour $E = \mathbb{R}$, la propriété (i) signifie que la courbe est "strictement" au-dessus de la tangente. La propriété (ii) est équivalente à la croissance stricte de la fonction dérivée.

On réfère à Ciarlet [3] et Faurre [5], pour les démonstrations de ces deux propositions.

Exemple.

Proposition 5.11 *Soient E un espace vectoriel normé, $a : E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique continue et telle que $\exists\, \alpha \geq 0,\ \forall\, v \in E,\ a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2$. ALors $j(v) = \frac{1}{2} a(v,v)$ est convexe. Si de plus, $\alpha > 0$, j est strictement convexe.*

Démonstration. Par la proposition 5.7, j est différentiable en tout point u et $Dj_u(h) = a(u,h)$. Ensuite

$$(Dj_u - Dj_v)(u-v) = a(u-v, u-v) \geq \alpha \|u-v\|^2$$

d'où les résultats en appliquant la proposition 5.9 (ii) et la proposition 5.10 (ii).

□

5.2.2 Equation d'Euler.

Théorème 5.12 *(équation d'Euler) Soient E un espace vectoriel normé et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable. Alors si u est un point de minimum global de J sur E, on a $DJ_u = 0$.*

Démonstration. Soit $v \in E$. En utilisant (5.2.14), on montre facilement que $DJ_u(v) = 0$.

□

5.2.3 Conditions d'optimalité dans le cas convexe.

Théorème 5.13 *Soient E un espace vectoriel normé, $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe différentiable et $K \subset E$ un ensemble convexe fermé non vide. Alors u est solution du problème de minimisation :*

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in K \\ J(u) = \inf_{v \in K} J(v) \end{array} \right. \tag{5.2.18}$$

si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in K \\ \forall v \in K,\ DJ_u(v-u) \geq 0. \end{array} \right. \tag{5.2.19}$$

Démonstration. La partie condition nécessaire ne nécessite pas que J soit convexe, seulement l'ensemble K. Soit u solution de (5.2.18). Soit $v \in K$. Comme K est convexe, pour $t \in]0,1]$, on a $u + t(v-u) \in K$ et donc

$$\frac{J(u+t(v-u)) - J(u)}{t} \geq 0 \tag{5.2.20}$$

Par définition de la différentiabilité :

$$J(u+t(v-u)) - J(u) = tDJ_u(v-u) + \epsilon(t(v-u)) \text{ avec } \lim_{t\to 0} \frac{|\epsilon(t(v-u))|}{t} = 0$$

d'où

$$\frac{J(u+t(v-u)) - J(u)}{t} \to DJ_u(v-u) \text{ quand } \ t \to 0,$$

et $DJ_u(v-u) \geq 0$ grâce à (5.2.20).

Réciproquement supposons que u vérifie (5.2.19). Comme J est convexe, par la proposition 5.9 (i), on a :

$$\forall\, v \in K, \ \ J(v) \geq J(u) + DJ_u(v-u)$$

d'où $J(v) \geq J(u)$ grâce à (5.2.19).

□

Cas particuliers importants

Les conditions (5.2.19) peuvent être simplifiées pour des ensembles plus particuliers. Les arguments permettant ces simplifications sont importants par eux-mêmes.

1) $K = C$ cône convexe fermé de sommet 0.

On dit que C est un cône convexe fermé de sommet 0 si C est convexe fermé et on a la propriété : si λ est un réel positif ou nul et v appartient à C, alors λv appartient à C.

Les conditions (5.2.19) peuvent alors se simplifier. Plus précisément on a le résultat suivant.

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in C \\ J(u) = \inf_{v\in C} J(v) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u \in C \\ \forall v \in C, \ DJ_u(v-u) \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u \in C \\ \forall v \in C, \ DJ_u(v) \geq 0, \\ DJ_u(u) = 0 \end{array} \right.$$

$J : E \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle convexe différentiable.

Démonstration. Un cône convexe fermé de sommet 0 est convexe fermé non vide, et le théorème 5.13 s'applique.
- Supposons $u \in C$ point de minimum, ou encore

$$\forall v \in C, \ DJ_u(v-u) \geq 0. \tag{5.2.21}$$

Soit $v \in C$. Alors $u + v = 2\ \frac{u+v}{2} \in C$. Donc $DJ_u(u+v-u) \geq 0$, c'est-à-dire $DJ_u(v) \geq 0$.
Pour $v = u$, on obtient $DJ_u(u) \geq 0$. Mais si on prend $v = 0$ dans (5.2.21), on trouve $DJ_u(u) \leq 0$, d'où $DJ_u(u) = 0$.
- La réciproque est évidente.

□

2) $K = M$ sous-espace vectoriel fermé de E

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in M \\ J(u) = \inf_{v\in M} J(v) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u \in M \\ \forall v \in M, \ DJ_u(v) = 0 \end{array} \right.$$

$J : E \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle convexe différentiable.

Démonstration. Un sous-espace vectoriel fermé est un cône convexe fermé de sommet 0, donc le résultat précédent s'applique. On sait que $u \in M$ est un point de minimum si et seulement si $\forall v \in M,\ DJ_u(v) \geq 0$ et $DJ_u(u) = 0$. Comme $-v \in M$, on a $DJ_u(-v) \geq 0$, d'où $DJ_u(v) = 0$.

□

3) $K = E$: $J(u) = \inf_{v \in E} J(v) \Leftrightarrow DJ_u = 0$.

L'équation d'Euler est une condition nécessaire et suffisante si J est convexe et différentiable.

Application aux fonctionnelles quadratiques

Proposition 5.14 *On se donne :*

- *H espace de Hilbert*
- *$a : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique, continue, coercive*
- *$L : H \to \mathbb{R}$ linéaire, continue*
- *K convexe, fermé, non vide.*

Soit

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v).$$

Alors J admet un unique point de minimum global sur K. De plus, u est caractérisé par

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in K, \\ \forall\, v \in K,\ a(u, v-u) \geq L(v-u). \end{array} \right. \tag{5.2.22}$$

Dans le cas particulier où K est un cône C convexe fermé de sommet 0, u est caractérisé par

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in C, \\ \forall\, v \in C,\ a(u, v) \geq L(v) \\ a(u, u) = L(u). \end{array} \right. \tag{5.2.23}$$

Dans le cas particulier où K est un sous-espace vectoriel fermé M de H, u est caractérisé par

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in M, \\ \forall\, v \in M,\ a(u, v) = L(v). \end{array} \right. \tag{5.2.24}$$

Démonstration. Par la proposition 5.11, J est strictement convexe, et J est continue. L'ensemble K est convexe, fermé, non vide. Soit K est borné. Soit K est non borné. Alors, en notant α une constante de coercivité de a, on a que

$$J(v) \geq \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 - \|L\|_{H'} \|v\|.$$

D'où $\lim_{\|v\|_{H^1} \to +\infty} J(v) = +\infty$ dans H et a fortiori sur K. Le théorème 5.5 peut être appliqué et fournit l'existence et l'unicité d'un point de minimum global de J sur K.

Par la proposition 5.7, J est différentiable et $DJ_u(v) = a(u, v) - L(v)$. Par le théorème 5.13, u est point de minimum global sur K si et seulement si u satisfait (5.2.22). Ces conditions se simplifient en (5.2.23) ou (5.2.24), pour des ensembles K particuliers comme décrit après le théorème 5.13.

□

Bibliographie

[1] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle : théorie et applications*, Dunod, 2005

[2] G. Choquet, *Cours de topologie*, Dunod, 2000

[3] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 2007

[4] R. Dautray, J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, 1987

[5] P. Faurre, *Analyse numérique. Notes d'optimisation*, Ellipses, 1998