Corrigé du TD1

Exercice 1. c.f. cours.

Exercice 2.

- fonction strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non surjective :
  exemple : fonction arctan, tangente hyperbolique, fonction exponentielle, ...
- fonction injective sur $\mathbb{R}$, non strictement monotone :
  Il est nécessaire que la fonction soit discontinue sur $\mathbb{R}$.
  Exemple : f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]-\infty, 0[$ et $f(x) = x$ sur $[0, +\infty[$
- fonction continue injective, non strictement monotone sur son domaine de définition:
  Il est nécessaire que l'ensemble de définition de la fonction ne soit pas un intervalle.
  Par exemple : f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x-1$ sur $\mathbb{R}^*_-$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*_+$ est bien continue, injective et non-strictement monotone sur $\mathbb{R}^*$. Appliquer les définitions de la continuité de l'injectivité et de la monotonie pour s'en convaincre.

Exercice 3. Pour la fonction g :
On peut essayer de montrer la bijectivité de manière purement calculatoire, mais on verra que c'est compliqué. Pour s'en sortir, il faut faire un dessin. Appliquer la fonction g sur un point (x, y) du carré $\mathcal{C}$, c'est diviser chacune de ses coordonnées par sa distance au point $(0, 0)$. Notons $A = (x, y) \in \mathcal{C}$, et $B = (x', y') = g(A)$. (On a et $x' = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}x$ et $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}y$). On vérifie facilement que $B \in \mathcal{S}$:

$$x'^2 + y'^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1$$

Si on trouve une fonction réciproque de g, on aura aussi montré la bijectivité. Il est nécessaire de faire un dessin, tâtonner un peu pour voir ce qu'il se passe. La fonction g normalise les points du carré pour les envoyer sur le cercle (elle "ramène" leur module à 1). Ce qu'on veut trouver, c'est le rapport inverse par lequel multiplier les coordonnées de B pour arriver à A. Autrement dit, c'est la distance OA en fonction des coordonnées de B. On place aussi les points $C = (x', 0)$ et $D = (0, y')$. Pour obtenir la distance OA, on applique le théorème de Thalès dans le triangle OIA (**Figure.1**), ce qui permet d'obtenir :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OI}{OC}, \quad \text{càd} \quad \frac{OA}{1} = \frac{1}{x'},$$

Sur le dessin qu'on a fait, on a donc $OA = \frac{1}{x'}$. Il faut faire attention, cette formule n'est pas valable sur tout le cercle (en particulier pour $x' = 0$!). On voit tout de même qu'on a toujours $OA = \frac{1}{x'}$ pour toutes les configurations où A est sur la même face du carré. On refait la même chose dans les autres cas. Par exemple si A est sur la face du bas, on obtient en appliquant Thalès dans le triangle OAL (**Figure 2.**):

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OL}{OD}, \quad \text{càd} \quad \frac{OA}{1} = \frac{1}{-y'},$$

En réitérant sur les deux autres faces, on obtient quatre expressions de OA pour A sur les quatres faces du carré (**Figure 3.**)

On en déduit une formule générale :

$$OA = \frac{1}{\max(|x'|, |y'|)}$$

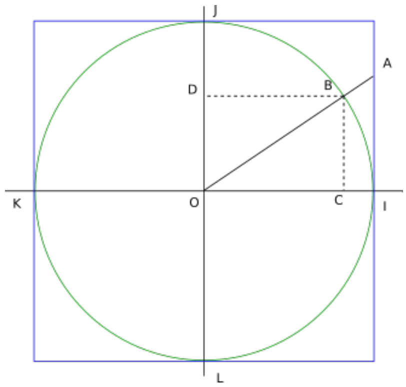


Figure 1:

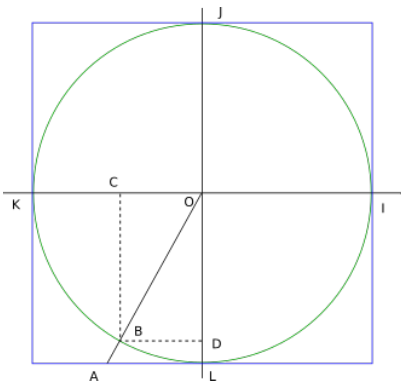


Figure 2:

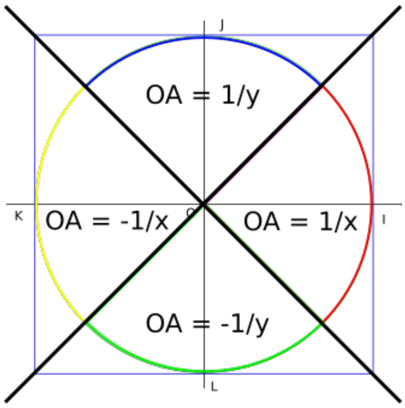


Figure 3:

On obtient donc A en multipliant les coordonnées de B par $\frac{1}{\max(|x'|,|y'|)}$. D'où la bijection réciproque :

$$
\begin{array}{rcccc}
g^{-1} & : & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\
 & & (x',y') & \longrightarrow & \frac{1}{\max(|x'|,|y'|)}(x',y')
\end{array}
$$

On peut vérifier qu'il s'agit bien de la réciproque en calculant $g \circ g^{-1}$ et $g^{-1} \circ g$.

Pour la fonction h: On pose $h = h(x,y) = \tan(\theta/2)$, avec $\theta \in]-\pi,\pi[$. On cherche à exprimer (x,y) en fonction de $\tan(\theta/2) = \frac{y}{x+1}$. Il faut avoir l'intuition, comme l'indication nous fait considérer un angle, que θ sera l'angle dans la forme polaire de (x,y). On pose alors $X = \cos\theta$ et $Y = \sin\theta$. On a :

$$
\begin{aligned}
X &= \cos\theta \\
&= \cos(2\arctan h) \\
&= 2\cos^2(\arctan h) - 1 \\
&= 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\right)^2 - 1 \\
&= \frac{1-h^2}{1+h^2}
\end{aligned}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{aligned}
Y &= \sin\theta \\
&= \sin(2\arctan h) \\
&= \sqrt{1-\cos^2(2\arctan h)} \\
&= \frac{2h}{1+h^2}
\end{aligned}
$$

Il faut à présent vérifier que l'application qui à h dans $\mathbb{R}$ associe $(\frac{h^2-1}{h^2+1}, \frac{-2h}{h^2+1})$ est bien la réciproque de la fonction h : On a pour (x,y) dans $\mathcal{S}$:

$$
\frac{1-\left(\frac{y}{x+1}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x+1}\right)^2} = \frac{(x+1)^2-y^2}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2+2x+1-(1-x^2)}{x^2+2x+1+(1-x^2)} = \frac{2x^2+2x}{2x+2} = x
$$

et

$$
\frac{2\frac{y}{x+1}}{1+\left(\frac{y}{x+1}\right)^2} = \frac{2y(x+1)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{2y(x+1)}{x^2+2x+1+(1-x^2)} = y
$$

Réciproquement, on a

$$
\frac{\frac{2h}{1+h^2}}{\frac{1-h^2}{1+h^2}+1} = h
$$

Donc on a bien trouvé la bijection réciproque.

En composant h^{-1} et g^{-1}, on a une paramétrisation $g^{-1} \circ h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathcal{C}\backslash\{(-1,0)\}$ du carré ! En considérant $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on atteint tout le carré.

Exercice 4.

1. Ce n'est pas un homéomorphisme, la fonction n'est pas injective sur $[0,1[$.
2. C'est un homéomorphisme du cercle, la fonction suit exactement la définition du cours.
3. La fonction n'est pas surjective sur $[0,1]$, ce n'est pas un homéomorphisme.
4. f définie par $f(x) = x + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}$ est continue et dérivable sur $[0,1]$. Pour x dans $\in [0,1]$, on a $f'(x) = 1 - cos(2\pi x)$, donc f' est nulle en 0 et strictement positive sur $]0,1]$. f est donc strictement croissante sur $[0,1]$, c'est un homéomorphisme sur $[0,1]$. De plus $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc f est un homéomorphisme du cercle.
5. f définie par $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ est un homéomorphisme sur $\mathbb{R}$ (fonction usuelle, le vérifier si besoin). On a $f(0) = 0$ mais $f(1) \neq 1$. De plus on a $f(x+1) \neq x+1$ donc f n'est pas un homéomorphisme du cercle (ni au sens de la définition, ni au sens du relèvement).
6. Pour $a = 1$, f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+1) = x+1$, c'est donc un relèvement d'un homéomorphisme du cercle. Sinon, f n'est pas un homéomorphisme du cercle, car d'une part f ne vérifie pas la propriété des relèvements, et d'autre part f est continue sans vérifier $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

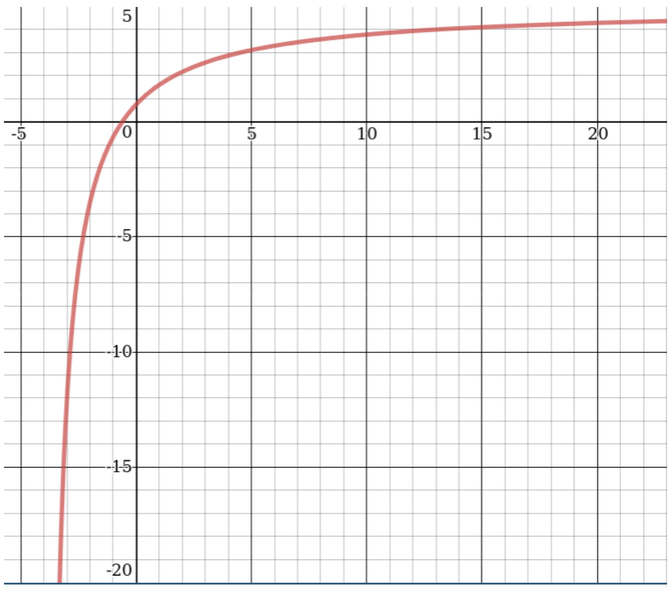
Exercice 5. Suite homographique.

1. (a) On résout l'équation $f(x) = x$ sur $]-4, +\infty[$:

$$\begin{array}{rccc} & f(x) & = & x \\ \Leftrightarrow & \frac{5x+3}{x+4} & = & x \\ \Leftrightarrow & x^2 - x - 3 & = & 0 \end{array}$$

On a $\Delta = 13$, d'où les deux solutions $\alpha = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. Avec $-4 < \beta < \alpha$.

(b) f est dérivable sur son intervalle de définition, et on a $f'(x) = \frac{17}{(x+4)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. f tend vers $-\infty$ en -4 et vers 5 en $+\infty$.



2. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n < u_{n+1}$:
Pour $n = 0$: on a bien $u_0 > 0$ et $u_1 = \frac{5/2+3}{1/2+4} = \frac{11}{9} > u_0$.
Supposons que la propriété est vraie au rang $n \geq 0$. Il vient

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= f(u_{n+1}) \\ &> f(u_n) \quad \text{car } f \text{ est strictement croissante et } u_{n+1} > u_n \\ &> u_{n+1} > 0 \end{aligned}$$

(b) (u_n) est croissante et majorée, car pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n < f(u_n) < 5$, donc (u_n) converge vers un réel l. En passant à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient $l = f(l)$, donc l est nécessairement un point fixe de f. Comme $u_0 > \beta$ et que (u_n) est croissante, on en déduit que (u_n) tend vers α.

3. (a) (v_n) est bien définie car $u_n > \beta$ pour tout n. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta} \\ &= \frac{\frac{5u_n+3}{u_n+4} - \frac{5\alpha+3}{\alpha+4}}{\frac{5u_n+3}{u_n+4} - \frac{5\beta+3}{\alpha+4}} \\ &= \frac{\beta+4}{\alpha+4} \frac{(\alpha+4)(5u_n+3)-(u_n+4)(5\alpha+3)}{(\beta+4)(5u_n+3)-(u_n+4)(5\beta+3)} \\ &= \frac{\beta+4}{\alpha+4} \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} \\ &= \frac{\beta+4}{\alpha+4} v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\beta+4}{\alpha+4}$.

(b) Le terme général de (v_n) est donc pour $n \geq 0$: $v_n = \left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$. On en déduit le terme général de (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\alpha - \beta \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta} \left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n}{1 - \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta} \left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n}$$

Comme $\beta < \alpha$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n = 0$, et ainsi (u_n) tend vers α.

Exercice 6. Il faut montrer que l'ensemble des fonctions affine non-constantes vérifie la définition d'un groupe :

- Existence du neutre : l'identité $f : x \to x$ est une fonction affine.
- Existence de l'inverse : Soit $f : x \to ax + b$ une fonction affine non-constante. La fonction $g : x \to \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ est affine non-constante et vérifie $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}$.
- $\forall f, g, h$, on a $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ car la composition des fonctions est associative.

Exercice 7. On considère les applications de $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ dans lui-même, définies par :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{f}_1(x) = x & \mathrm{f}_2(x) = \frac{1}{1-x} & \mathrm{f}_3(x) = \frac{x-1}{x} \\ \mathrm{f}_4(x) = \frac{1}{x} & \mathrm{f}_5(x) = 1 - x & \mathrm{f}_6(x) = \frac{x}{x-1} \end{array}$$

Montrons que l'ensemble de ces six applications est un groupe pour la loi $\circ$.
f_1 est le neutre pour la composition. La loi $\circ$ est associative. Il reste à montrer que l'ensemble de

ces fonctions est stable par la composition, et que l'inverse (au sens de la composition) de chacune des fonctions est bien dans l'ensemble. On vérifie donc :

$$\begin{array}{lllll}
f_2 \circ f_2 = f_3 & f_2 \circ f_3 = f_1 & f_2 \circ f_4 = f_6 & f_2 \circ f_5 = f_4 & f_2 \circ f_6 = f_5 \\
f_3 \circ f_2 = f_1 & f_3 \circ f_3 = f_2 & f_3 \circ f_4 = f_5 & f_3 \circ f_5 = f_6 & f_3 \circ f_6 = f_4 \\
f_4 \circ f_2 = f_5 & f_4 \circ f_3 = f_6 & f_4 \circ f_4 = f_1 & f_4 \circ f_5 = f_2 & f_4 \circ f_6 = f_3 \\
f_5 \circ f_2 = f_6 & f_5 \circ f_3 = f_4 & f_5 \circ f_4 = f_3 & f_5 \circ f_5 = f_1 & f_5 \circ f_6 = f_2 \\
f_6 \circ f_2 = f_4 & f_6 \circ f_3 = f_5 & f_6 \circ f_4 = f_2 & f_6 \circ f_5 = f_3 & f_6 \circ f_6 = f_1
\end{array}$$

Remarque : $\{f_1\}$, $\{f_1, f_4\}$, $\{f_1, f_5\}$, $\{f_1, f_6\}$, $\{f_1, f_2, f_3\}$ (et d'autres, sans doute) sont des sous-groupes du groupe que l'on considérait. C'est-à-dire qu'ils sont inclus dans le groupe de toutes les fonctions (f_i), mais comme ils contiennent le neutre et sont **stables** par la composition et le passage à l'inverse, ils ont eux-même une structure de groupe.