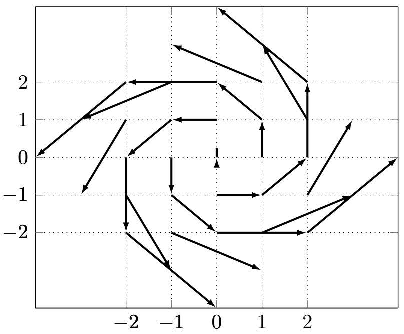
UFR Mathématiques — Sorbonne Université

1M025 Partie I : Homéomorphismes du cercle — mars 2019

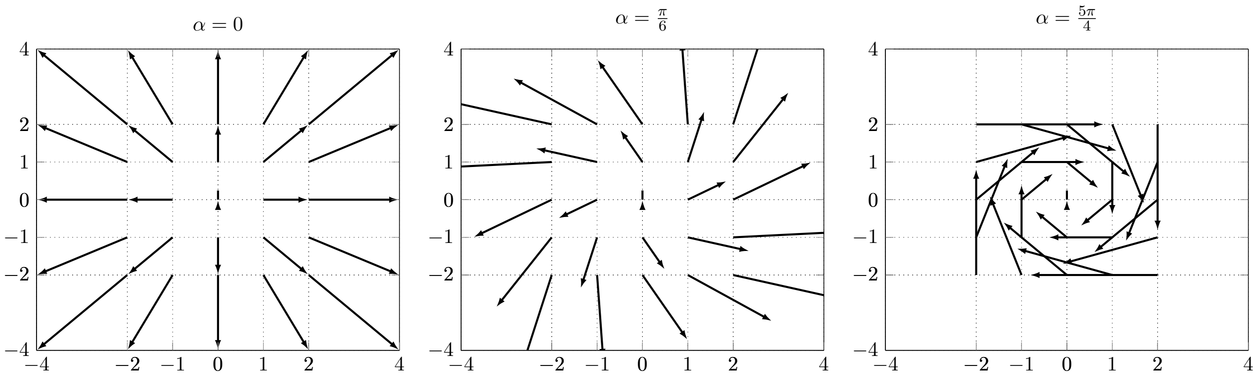
TD4: Champs de vecteurs, Équations différentielles associées, Topologie de $\mathbb{R}^2$

1 Champs de vecteurs

Exercice 1. On a $v(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.



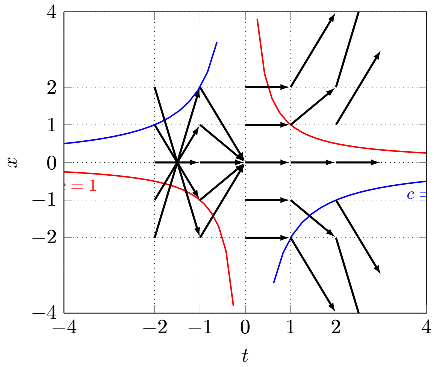
Exercice 2. Il s'agit simplement du champ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auquel on applique une roation d'angle α :



2 Une exemple d'équation différentielle

Considérons l'équation (E_1) $x'(t) = tx(t)$.

Exercice 3. Il s'agit d'une équation différentielle scalaire (une seule variable t), non-autonome (les coefficients dépendent de t). On écrit l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$ sous la forme $\begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ xt \end{pmatrix}$. Le champ vectoriel associé est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ xt \end{pmatrix}$. Les isoclines (en couleur sur la figure) sont de la forme $x = \frac{c}{t}$, où $c \in \mathbb{R}$. Sur ces courbes, le champ est constant égal à $\begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$.



Exercice 4. Soit x une solution constante de l'équation différentielle. Sa dérivée x' est nulle sur $\mathbb{R}$. Il vient donc : $\forall t \in \mathbb{R}, 0 = tx(t)$. Donc en particulier $x(1) = 0$ et x est donc la solution nulle.

On cherche des solutions continues sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle, donc $\mathcal{C}^!$ sur l'ouvert $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (cas non-autonome, voir la Remarque 1.19 du poly de cours) : pour $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution x_0 de l'équation vérifiant $x_0(t_0) = 0$. Ainsi, une solution s'annulant sur $\mathbb{R}$ est nécessairement la fonction nulle.

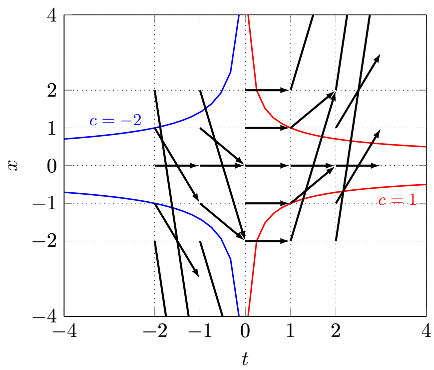
On considère maintenant une solution non-constante x. On sait d'après la question précédente que x ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. On écrit (E_1) sous la forme $\frac{x'(t)}{x(t)} = t$.

$$
\begin{array}{lccll}
\forall t \in \mathbb{R}, & \frac{x'(t)}{x(t)} & = & t & \\
\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, & \int_0^t \frac{x'(u)}{x(u)} \mathrm{d}u & = & \int_0^t u \mathrm{d}u & \\
\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, & \ln(|x(t)|) - \ln(|x(0)|) & = & \frac{t^2}{2} & \\
\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, & \frac{|x(t)|}{|x(0)|} & = & \exp(\frac{t^2}{2}) & \\
\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, & x(t) & = & \pm|x(0)| \exp(\frac{t^2}{2}) & \\
\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, & x(t) & = & K \exp(\frac{t^2}{2}) & \text{pour } K \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle sont donc les fonctions $t :\to K \exp(\frac{t^2}{2})$ où K est une constante réelle. On constate que cette écriture englobe le cas de la solution nulle, pour $K = 0$.

Exercice 6. Considérons l'équation (E_2) $x'(t) = tx^2(t)$. Le champ de vecteur associé est $\begin{pmatrix} 1 \\ tx^2 \end{pmatrix}$

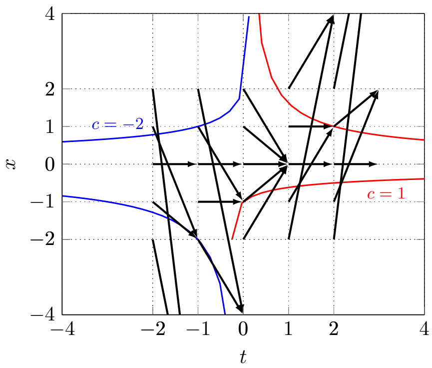


avec les isoclines $x^2 = \frac{c}{t}$. De la même manière que dans les questions précédentes, on montre qu'une solution x constante est nécessairement nulle. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, les solutions non constantes ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$. On considère une solution non constante x, et on résout l'équation en divisant par x:

$$\begin{array}{rccc} \forall t \in \mathbb{R}, & \frac{x'(t)}{x^2(t)} & = & t \\ \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, & \int_0^t \frac{x'(u)}{x^2(u)} \mathrm{d}u & = & \int_0^t u\mathrm{d}u \\ \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, & \frac{1}{x(0)} - \frac{1}{x(t)} & = & \frac{t^2}{2} \\ \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, & \frac{1}{x(t)} & = & \frac{1}{x(0)} - \frac{t^2}{2} \\ \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, & x(t) & = & \frac{1}{\frac{1}{x(0)} - \frac{t^2}{2}} \end{array}$$

Les solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $t \to \dfrac{1}{K - \frac{t^2}{2}}$ (avec $K \in \mathbb{R}^{-*}$), ainsi que la fonction nulle.

Exercice 7. On considère l'équation (E') $x'(t) = tx^2(t) - x(t)$. Le champ de vecteur associé est $\begin{pmatrix} 1 \\ tx^2 - x \end{pmatrix}$.



Avec les isoclines de la forme $tx^2 - x = c$, càd $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4ct}}{2t}$ pour $t \geq -\frac{1}{4c}$ et $x = c$ en $t = 0$. De la même façcon que précédemment, on sait que toute solution constante est nulle, et que toute solution qui s'annule est la solution nulle. On cheche une solution qui ne s'annule pas. Pour résoudre on pose $u(t) = \frac{1}{x(t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Il vient :

$$\begin{array}{rccc} \forall t \in \mathbb{R}, & \frac{x'(t)}{x^2(t)} & = & t - \frac{1}{x(t)} \\ \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, & u'(t) & = & -t + u(t) \\ \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, & \int_0^t \frac{x'(u)}{x^2(u)} \mathrm{d}u & = & \int_0^t u\mathrm{d}u \end{array}$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation $u'(t) - u(t) = -t$. La solution de l'équation homogène est connue : Elle est de la forme $u_H(t) = C\exp(t), \quad C \in \mathbb{R}$. On peut trouver une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante. Ici, une solution particulière évidente est $u_P(t) = t + 1$. La solution générale est donc :

$$u(t) = t + 1 + C\exp(t), \qquad C \in \mathbb{R}$$

3 Fondamentaux sur la topologie de $\mathbb{R}^2$

Exercice 8.

A est ouvert : pour un point dans A il suffit de considérer le rayon $\min(|x-1|, 1-|x-1|)$.

B est fermé : pour un point dehors B on considère soit le rayon $|x|$ si x est strictement négatif, soit $(y-x)/\sqrt{2}$ sinon.

C n'est ni ouvert ni fermé. Effectivement, les points de la forme $|x| < 1, |y| = 1$ appartiennent à X sans aucun voisinage, et pareil pour les points de la forme $|x| = 1, |y| \leq 1$ et le complémentaire de X.

D n'est ni ouvert ni fermé : Il n'est pas ouvert car $\mathbb{Q}^2$ est dense dans $\mathbb{R}^2$, et il n'est pas fermé car $(\pi, 0) + \mathbb{Q}^2$ y est dense aussi.

Exercice 9. Pour montrer que tout ouvert A de $\mathbb{R}^2$ est une réunion de disques ouverts il suffit d'appliquer la définition en chaque point de l'ouvert. Il est donc réunion de tout ces disques car chaque point appartient à pou moins une disque : celui dont elle est le centre.

Pour voir qu'il suffit de considérer une réunion dénombrable on voudrait ne prendre que des disques dont les centres sont dans $\mathbb{Q}^2 \bigcap A$. Mais il n'est pas évident que la réunion de ces disques couvre A. On choisit alors que pour chaque point a dans $\mathbb{Q}^2 \bigcap A$, on va considérer le disque $D(a, r)$ centré en ce point de rayon maximal r_a tel que $D(a, r_a) \subset A$. Considérons alors un point $b \in A$ dont les coordonnées ne sont pas nécessairement rationnelles. Il existe un rayon r_b tel que $D(b, r_b) \subset A$. Considérons le disque de rayon trois fois plus petit $D(b, \frac{r_b}{3})$. Comme $\mathbb{Q}^2$ est dense dans $\mathbb{R}^2$ il existe $a \in \mathbb{Q}^2 \bigcap D(b, \frac{r_b}{3})$. Par le choix de r_a on a donc $r_a \geq \frac{2r_b}{3}$ et $b \in D(a, r_a)$. Alors $A = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}^2 \bigcap A} D(a, r_a)$. *Remarque : on peut remplacer* 3 *par* $2 + \varepsilon$.

Exercice 10. Soit $(x_0, y_0) \in U$. Alors $f(x_0) \neq y_0$. Soit $\delta = \frac{|y_0 - f(x_0)|}{2}$. Par définition de la continuité on sait qu'il existe ε tel que pour tout x avec $|x - x_0| < \varepsilon$ on a $|f(x) - f(x_0)| < \delta$. Alors pour tout tels x on a $|y_0 - f(x)| > \delta$. Il suffit alors de prendre le disque centré en (x_0, y_0) de rayon $\min(\delta, \varepsilon)$.

Exercice 11. Soit $X_0 \in U$. Alors $g(X_0) \neq 0$. Soit $\delta = |g(X_0)|$. Par définition de la continuité on sait qu'il existe ε tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^2$ avec $\|X - X_0\| < \varepsilon$ on a $|g(X) - g(X_0)| < \delta$. Alors pour tout tels X on a $|g(X)| > 0$. Il suffit alors de prendre le disque centré en X_0 de rayon ε.

Pour retrouver le résultat de l'exercice précédente il suffit de prendre $g(x, y) = f(x) - y$.

Exercice 12. Considérons un point de la forme $(0, y)$ avec $|y| \leq 1$. Il n'est clairement pas inclus dans le graphe de la fonction car la fonction n'est pas définie en 0. On va montrer qu'aucun voisinage de ce point n'est inclus dans le complémentaire du graphe. Soit $\alpha = \arcsin(y)$. Alors pour chaque $k \in \mathbb{N}$ on a $\sin(\alpha + 2\pi k) = y$. Autrement dit, si $x_k = \frac{1}{\alpha + 2\pi k}$, on a $h(x_k) = y$ et donc $\|(0, y) - (x_k, h(x_k))\| = x_k$. Car $x_k \to 0$ pour $k \to \infty$, cela conclut l'exercice.