Corrigé TD5

1 Cauchy-Lipschitz

Exercice 1. On considère les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} t^3 x'(t) = x(t), & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = \sqrt{|x(t)|}, & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Le premier problème s'écrit

$$\begin{cases} x'(t) = t^{-3} x(t), & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

et le second membre n'est pas défini en $t = 0$. On peut donc déjà affirmer que le théorème de Cauchy ne peut pas être appliqué sur $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$, on peut par contre appliquer le théorème. Comme 0 est solution sur chacun de ces intervalles, on sait que toute solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$, qui s'annule est la solution nulle. On cherche alors une solution définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$, qui ne s'annule pas. L'équation différentielle s'intègre par séparation des variables :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)} \mathrm{d}s &= \int_{t_0}^{t} s^{-3} \mathrm{d}s \\ \Leftrightarrow \ \ln \frac{|x(t)|}{|x(t_0)|} &= -\frac{1}{2}(t^{-2} - {t_0}^{-2}) \\ \Leftrightarrow \quad x(t) &= K \exp\left(-\frac{1}{2} t^{-2}\right) \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Les solutions constantes sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ peuvent être prolongées par continuité en 0. Néanmoins elle vérifient la condition initiale $x(0) = 0$ si et seulement si elles sont nulles.

Pour le second problème, cherchons une solution non nulle. Puisqu'il existe un réel en lequel la solution ne s'annule pas, par continuité il exoiste un intervalle $]t_0, t_1[$ sur lequel elle ne s'annule pas. Supposons que la solution est **strictement positive** sur cet intervalle. On peut intégrer par séparation des variables:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{\sqrt{|x(s)|}} \mathrm{d}s &= t - t_0 && \text{pour } t \in]t_0, t_1[\\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x(t)} - 2\sqrt{x(t_0)} &= t - t_0 && \text{pour } t \in]t_0, t_1[\\ \Leftrightarrow \quad x(t) &= (\frac{t}{2} + K)^2 && \text{pour } t \in]t_0, t_1[\text{ et } K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Si la solution est strictement négative sur l'intervalle $]t_0, t_1[$, on trouve $x(t) = -(\frac{t}{2} + K)^2$ avec $K \in \mathbb{R}$. En particulier, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vaut $-(t/2)^2$ sur $\mathbb{R}^-$ et $(t/2)^2$ sur $\mathbb{R}^+$ est solution, et elle vérifie la condition initiale $x(0) = 0$. Or la fonction constante nulle est évidemment solution sur $\mathbb{R}$ et vérifie aussi la condition initiale, il n'y a donc pas unicité.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz n'est pourtant pas pris en défaut. En effet ses hypothèses ne sont pas vérifiées puisque la fonction $t \to \sqrt{|t|}$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ en 0.

2 Barrières

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) \geq 1$ pour tout x.. Considérons l'équation différentielle $(*)\quad y' = y^2 f - 1$.

Exercice 2. Si on écrit l'équation de la forme $y'(t) = F(t, y(t))$ on a $F(t, y) = y^2 f(t) - 1$. Alors une fonction α est barrière inférieure si et seulement si $\alpha'(t) \leq \alpha(t)^2 f(t) - 1$. Pour $\alpha(t) = \pm 1$ on a $\alpha'(t) = 0$ et $\alpha(t)^2 = 1$. Par l'hypothèse sur f on a $0 \leq 1 f(t) - 1$.

De même on a $0 > 0f - 1$ donc $\beta(t) = 0$ est une barrière supérieure stricte.

Exercice 3. Le champ $v(t, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y^2 f(t) - 1 \end{pmatrix}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc on peut appliquer Cauchy-Lipschitz, ce qui démontre le première résultat. Pour montrer que les solutions sont croissantes dans les demi-plans il suffit de remarquer que $\phi' = \phi^2 f - 1 \geq 0$ si $\phi^2 \geq 1$.

Exercice 4. Les solutions constantes sont $y = \pm 1$. En supposant $y \neq \pm 1$, on écrit l'équation de la forme $\frac{y'}{y^2 - 1} = 1$, et donc

$$\frac{y'}{y-1} - \frac{y'}{y+1} = 2.$$

En intégrant on obtient $\ln |\frac{y-1}{y+1}| = 2t + c$, ou $|\frac{y-1}{y+1}| = e^{2t+c} = Ce^{2t}$ avec $C > 0$. De façon équivalent, $\frac{y-1}{y+1} = Ce^{2t}$ avec $C \neq 0$, mais comme 1 est solution constante, la condition $C \neq 0$ est inutile.

Alors les solutions sont $y = -1$ et $y = \frac{Ce^{2t}+1}{1-Ce^{2t}}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. On commence par remarquer qu'il est direct à vérifier que les solutions décrits en exercice 4 sont des barrières inférieures. Soit ϕ une solution de $(*)$ et ψ une solution de $y' = y^2 - 1$, tout les deux avec conditions initiales (x_0, y_0). Alors $\phi(x) \geq \psi(x)$ pour $x > x_0$ par la propreté principale des barrières. Similairement, on a $\phi(x) \leq \psi(x)$ pour $x < x_0$. Effectivement, raisonons par le contraire : Soit $x_1 < x_0$ tel que $\phi(x_1) > \psi(x_1)$. Alors $\phi(x) > \psi(x)$ pour tout $x > x_1$, en particulier pour $x = x_0$, contradiction.

a) Si $y_0 > 1$ on a $\frac{y_0-1}{y_0+1} = Ce^{2x_0}$ et donc $C > 0$. On note $b' = -\frac{1}{2}\ln C$. Alors ψ est défini soit sur $]-\infty, b'[$, soit sur $]b', +\infty[$. On remarque que $\psi(x) > 0$ si $x < b'$ et $\psi(x) < 0$ si $x > b'$. Alors car $y_0 > 1 > 0$, on a que ψ est défini sur $]-\infty, b'[$ et $b' > x_0$.

   De plus, ψ a une asymptote verticale en b', et car elle reste positive, elle y diverge alors vers $+\infty$. Car $\phi(b' - \varepsilon) > \psi(b' - \varepsilon)$ si ϕ y est défini, il est impossible que ϕ ait une limite fini en b', d'où $b \leq b'$.

b) Car 0 est une barrière supérieure stricte, $\phi(x) > 0$ pour $x < x_0$. Alors ϕ ne diverge pas vers $-\infty$ en a. Il suffit alors de montrer qu'elle ne diverge pas vers $+\infty$ en aucun réel $a < x_0$. Si on suppose le contraire, on aurait que assez proche de a, $\phi > -1$. Mais ϕ est croissante dans la demi-plan $y \geq 1$, contradiction.

c) Pour $y_0 \leq 0$ on a similairement $\phi(x) < 0$ pour $x > x_0$ car 0 est barrière supérieure stricte. De plus, ϕ ne peut pas diverger vers $-\infty$ en $b > x_0$ car la fonction est croissante sur $y \leq -1$.

   Pour $y_0 < -1$ on obtient encore $C > 0$. Cette fois $y_0 < 0$ donc ψ est défini sur $]a', +\infty[$ avec $a' = -\frac{1}{2}\ln C$ et donc $a \geq a'$.

Exercice 6. Pour $y_0 = 0$ la solution est contenu entre -1 et 0 pour $x > x_0$ et entre 0 et 1 pour $x < x_0$.

Exercice 7. Les différents types de solution maximale trouvés sont donc les suivants :