

Corrigé TD6

Exercice 1. On fixe un réel $c > 0$. Pour tout $b \in [0, c[$, on considère l'équation différentielle linéaire sans second membre :

$$(E_b) \quad x''(t) + 2bx'(t) + c^2x(t) = 0.$$

Par hypothèse, $b^2 - c^2$ est < 0 . On pose $\sigma = \sqrt{c^2 - b^2}$ et $P(X) = X^2 + 2bX + c^2$.

1. Exprimer en fonction de b et σ les racines λ et μ de l'équation $P(X) = 0$, en supposant que la partie imaginaire de λ est > 0 .

Correction. Les racines sont $\lambda = -b + i\sigma$ et $\mu = -b - i\sigma$. □

2. Soit $\nu \in \mathbb{C}$. Montrer que la fonction à valeurs complexes $e_\nu : t \mapsto e^{\nu t}$ est solution de (E_b) si et seulement si ν est racine de P .

Correction. Si $x(t) = e^{\nu t}$ alors $x'(t) = \nu x(t)$ et $x''(t) = \nu^2 x(t)$, donc

$$x''(t) + 2bx'(t) + c^2x(t) = (\nu^2 + 2b\nu + c^2)x(t)$$

et ceci est nul si et seulement si $P(\nu) = 0$. □

3. Montrer que les fonctions u et v , définies par $u(t) = e^{-bt} \cos(\sigma t)$ et $v(t) = e^{-bt} \sin(\sigma t)$ sont solutions de (E_b) .

Correction. D'après ce qui précède, la fonction $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t} = e^{-bt} (\cos(\sigma t) + i \sin(\sigma t))$ est solution de (E_b) , de même que la fonction e_μ . Par conséquent, $u = (e_\lambda + e_\mu)/2$ et $v = (e_\lambda - e_\mu)/2i$ sont également solutions. □

On rappelle que pour toute solution w de (E_b) à valeurs réelles, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ uniques tels que $w = \alpha u + \beta v$. (On ne demande pas de démontrer ceci.) On considère maintenant l'équation différentielle avec second membre :

$$(S_b) \quad x''(t) + 2bx'(t) + c^2x(t) = \cos(ct).$$

4. On suppose $b \neq 0$. Montrer alors qu'il existe une unique solution $f = f_b$ de (S_b) de la forme $t \mapsto A \sin(ct)$, pour une constante $A = A_b$ à préciser. Déterminer l'unique solution x_b de (S_b) telle que $x_b(0) = 0 = x'_b(0)$.

Correction. Cherchons une solution de (S_b) sous la forme $f(t) = A \sin(ct)$. Alors $f'(t) = Ac \cos(ct)$ et $f''(t) = -Ac^2 \sin(ct)$, donc

$$f''(t) + 2bf'(t) + c^2f(t) = 2Abc \cos(ct)$$

et ceci égale $\cos(ct)$ si et seulement si $A = 1/2bc$. Alors, pour toute solution x de (S_b) , $x - f$ est solution de l'équation sans second membre (E_b) , et réciproquement. Donc pour toute solution x de (S_b) il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ uniques tels que

$$x(t) = \alpha e^{-bt} \cos(\sigma t) + \beta e^{-bt} \sin(\sigma t) + \frac{1}{2bc} \sin(ct)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. La condition $x(0) = 0$ donne $\alpha = 0$; alors

$$x'(t) = \beta e^{-bt} (-b \sin(\sigma t) + \sigma \cos(\sigma t)) + \frac{1}{2b} \cos(ct)$$

donc la condition $x'(0) = 0$ donne $\beta\sigma = -1/2b$ i.e. $\beta = -1/2b\sigma$. La solution cherchée est donc donnée par

$$(*) \quad x_b(t) = \frac{1}{2bc} \sin(ct) - e^{-bt} \frac{1}{2b\sigma} \sin(\sigma t).$$

□

5. On suppose $b = 0$. Montrer alors qu'il existe une unique solution g_0 de (S_0) de la forme $t \mapsto Bt \sin(ct)$, pour une constante B à préciser. Déterminer l'unique solution x_0 de (S_0) telle que $x_0(0) = 0 = x_0'(0)$.

Correction. Cherchons une solution de (S_0) sous la forme $g(t) = Bt \sin(ct)$. Alors

$$g'(t) = B(\sin(ct) + ct \cos(ct)) \quad \text{et} \quad g''(t) = B(2c \cos(ct) - c^2 t \sin(ct))$$

donc, puisque $b = 0$, on a

$$g''(t) + c^2 g(t) = 2Bc \cos(ct)$$

et ceci égale $\cos(ct)$ si et seulement si $B = 1/2c$. Tenant compte de $b = 0$, d'où $e^{-bt} = 1$ pour tout t , on obtient comme précédemment que pour toute solution x de (S_0) il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ uniques tels que

$$x(t) = \alpha \cos(\sigma t) + \beta \sin(\sigma t) + \frac{t}{2c} \sin(ct)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. La condition $x(0) = 0$ donne $\alpha = 0$; alors

$$x'(t) = \beta\sigma \cos(\sigma t) + \frac{1}{2c} \sin(ct) + \frac{t}{2} \cos(ct)$$

donc la condition $x'(0) = 0$ donne $\beta\sigma = 0$ i.e. $\beta = 0$. La solution cherchée est donc donnée par $x_0(t) = \frac{t}{2c} \sin(ct)$. □

On rappelle que lorsque h tend vers 0, on a $\sqrt{1-h} = 1 - \frac{h}{2} + O(h^2) = 1 + O(h)$, et de même $(1-h)^{-1/2} = 1 + O(h)$. Comme $\sigma = c \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)^{1/2}$ alors, lorsque b tend vers 0 on a : $\sigma = c + O(b^2)$ et $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{c} + O(b^2)$.

Fixons désormais un réel t et posons $h = \sigma t - ct$. Alors $\sigma t = ct + h$ et l'on a

$$\sin(\sigma t) = \sin(ct) \cos(h) + \cos(ct) \sin(h)$$

avec $h = O(b^2)$ lorsque $b \rightarrow 0$.

6. En utilisant le développement limité en 0 de \cos et \sin à l'ordre 1, et de \exp à l'ordre 2, montrer que $\sin(\sigma t) = \sin(ct) + O(b^2)$ puis que

$$e^{-bt} \frac{\sin(\sigma t)}{\sigma} = (1 - bt) \frac{\sin(ct)}{c} + O(b^2).$$

Montrer alors (t étant fixé) que $\lim_{b \rightarrow 0} (x_b(t) - x_0(t)) = 0$.

Correction. On a $\cos(h) = 1 + o(h) = 1 + o(b^2)$ et $\sin(h) = h + o(h) = O(b^2)$, d'où $\sin(\sigma t) = \sin(ct) + O(b^2)$. On a aussi

$$e^{-bt} = 1 - bt + \frac{b^2 t^2}{2} + o(b^2) = 1 - bt + O(b^2).$$

On a vu plus haut que $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{c} + O(b^2)$; on obtient donc que

$$e^{-bt} \frac{\sin(\sigma t)}{\sigma} = (1 - bt + O(b^2)) \left(\frac{1}{c} + O(b^2) \right) (\sin(ct) + O(b^2)) = (1 - bt) \frac{\sin(ct)}{c} + O(b^2).$$

D'après l'égalité (*) obtenue dans la question (4), on a donc :

$$x_b(t) = \frac{t}{2c} \sin(ct) + O(b) = x_0(t) + O(b)$$

d'où (t étant fixé), $\lim_{b \rightarrow 0} (x_b(t) - x_0(t)) = 0$. □

Exercice 2. Soient $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \arctan(y) - \frac{1}{x}$. On considère l'équation différentielle :

$$(*) \quad y'(t) = \arctan(y(t)) - \frac{1}{t}.$$

avec la condition initiale $y(1) = b$, où b est un réel.

- Déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Sont-elles continues sur U ?

Correction. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + y^2}$. Ces deux fonctions sont continues sur U . □

- Citer un théorème du cours qui assure qu'il existe une unique solution maximale (J_b, y_b) vérifiant $y_b(1) = b$, où J_b est un intervalle ouvert contenant 1.

Correction. Comme f est de classe C^1 sur U , l'existence et l'unicité d'une solution maximale (J_b, y_b) telle que $y_b(1) = b$ résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz. □

- Soient B, S les fonctions $[1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par $B(t) = b - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)(t - 1)$ et $S(t) = b + \frac{\pi}{2}(t - 1)$. Montrer que B (resp. S) est une barrière inférieure (resp. supérieure) forte pour (*). En déduire que, pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'extrémité supérieure de J_b est $+\infty$.

Correction. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $|\arctan(y)| < \pi/2$ donc pour tout $t \geq 1$ on a

$$B'(t) = -\frac{\pi}{2} - 1 < f(t, B(t)) \quad \text{resp.} \quad f(t, S(t)) < \frac{\pi}{2} = S'(t)$$

donc B (resp. S) est une barrière inférieure (resp. supérieure) forte sur $[1, +\infty[$ pour (*). Comme $B(1) = y_b(1) = S(1)$, alors pour $t \geq 1$ la solution y_b reste dans l'entonnoir défini par B et S . Donc, d'après le théorème de l'entonnoir, J_b contient $[1, +\infty[$. □

- Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $\beta(t) = b - \frac{\pi}{2}(t - 1) - \log(t)$ et $\gamma(t) = b + \frac{\pi}{2}(t - 1) - \log(t)$. Montrer que β (resp. γ) est une barrière inférieure (resp. supérieure) forte pour (*) sur \mathbb{R}_+^* , puis que $\gamma(t) < y_b(t) < \beta(t)$ pour tout $t \in J_b$ tel que $t < 1$. En déduire que, pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'extrémité inférieure de J_b est 0 et que $\lim_{t \rightarrow 0^+} y_b(t) = +\infty$. (On pourra utiliser le théorème de l'entonnoir pour les temps décroissants.)

Correction. Comme $|\arctan(y)| < \pi/2$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, alors β (resp. γ) est une barrière inférieure (resp. supérieure) forte pour $(*)$ sur \mathbb{R}_+^* . Comme $\beta(1) = y_b(1) = \gamma(1)$, on a donc

$$\gamma(t) < y_b(t) < \beta(t)$$

pour tout $t \in J_b$ tel que $t < 1$. D'après le théorème de l'entonnoir pour les temps décroissants^(*), on en déduit que J_b contient $]0, 1]$. Comme γ a pour limite $+\infty$ quand $t \rightarrow 0^+$, il en est de même pour y_b et donc l'extrémité inférieure de J_b est 0. Par conséquent, pour tout $b \in \mathbb{R}$ on a $J_b =]0, +\infty[$.

(*) De façon détaillée, considérons une équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$, avec f de classe C^1 , soit (J, y) la solution maximale telle que $y(t_0) = u_0$ et soit β (resp. γ) une barrière inférieure (resp. supérieure) forte sur un intervalle $I =]a, t_0]$. On suppose que $\beta(t_0) = y(t_0) = \gamma(t_0)$ et $\beta(t) > \gamma(t)$ pour tout $t \in I$ tel que $t < t_0$. Posons $\tilde{I} = \{s \in \mathbb{R}_+ \mid t_0 - s \in I\}$, considérons la fonction $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto y(t_0 - s)$ et définissons de même $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\gamma}$. Alors \tilde{y} est solution de l'équation différentielle

$$(\dagger) \quad z'(s) = -f(t_0 - s, z(s))$$

et $\tilde{\beta}$ (resp. $\tilde{\gamma}$) est une barrière supérieure (resp. inférieure) forte pour (\dagger) sur \tilde{I} . D'après le théorème de l'entonnoir, \tilde{y} est définie sur \tilde{I} et reste dans l'entonnoir défini par $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\beta}$. Par conséquent, y est définie sur I et pour tout $t \in I$ on a $\gamma(t) < y(t) < \beta(t)$. \square

5. Soit \mathcal{C}_0 l'isocline de pente 0, i.e. $\mathcal{C}_0 = \{(t, y) \in U \mid f(t, y) = 0\}$. Déterminer \mathcal{C}_0 et montrer que c'est une barrière inférieure forte pour $(*)$ sur $]2/\pi, +\infty[$. Montrer également que la fonction nulle est une barrière supérieure forte pour $(*)$ sur \mathbb{R}_+^* .

Correction. Pour $(t, y) \in U$, on a $\arctan(y) = 1/t$ si et seulement si $t > 2/\pi$ et $y = \tan(1/t)$. Posons $I =]2/\pi, +\infty[$ et $g(t) = \tan(1/t)$ pour tout $t \in I$. Alors, pour tout $t \in I$, on a

$$g'(t) = -\frac{1}{\cos^2(1/t)} \frac{1}{t^2} < 0 = f(t, g(t))$$

donc g est une barrière inférieure forte pour $(*)$ sur I . Et comme $\arctan(0) = 0$, on a $f(t, 0) = -1/t < 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, donc la fonction nulle est une barrière supérieure forte pour $(*)$ sur \mathbb{R}_+^* . \square

6. On pose $A = \{(x, y) \in U \mid x > 2/\pi, 0 \leq y \leq \tan(1/t)\}$. Montrer qu'il existe un unique $\bar{b} \in \mathbb{R}$ tel que $(t, y_{\bar{b}}(t)) \in A$ pour tout $t > 2/\pi$.

Correction. D'après la question précédente, A est un anti-entonnoir pour $(*)$. Et, comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tan(1/t) = 0$, cet entonnoir est resserré en $+\infty$. De plus, pour tout $(x, y) \in A$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + y^2} > 0.$$

Donc, d'après le théorème de l'anti-entonnoir, il existe un unique $\bar{b} \in \mathbb{R}$ tel que la solution $\bar{y} = y_{\bar{b}}$ soit dans A pour tout $t > 2/\pi$. \square

7. Montrer que si $b > \bar{b}$, il existe $T > 2/\pi$ tel que $y_b(t) > \tan(1/t)$ et $y_b'(t) > 0$ pour tout $t > T$. En déduire que y_b tend en $+\infty$ vers une limite $L \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, puis montrer que $L = +\infty$. (Raisonnement par l'absurde en supposant L finie pour obtenir une contradiction.)
8. Montrer de même que si $b < \bar{b}$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_b(t) = -\infty$.

Correction. Soit $b \neq \bar{b}$. Par l'unicité de la solution dans l'anti-entonnoir A , il existe $T > 2/\pi$ tel que le point $p(T) = (T, y_b(T))$ soit hors de A . Comme y_b ne peut pas croiser $y_{\bar{b}}$, alors $p(T)$ est strictement au-dessus de la barrière inférieure \mathcal{C}_0 si $b > \bar{b}$, resp. strictement en-dessous de la barrière supérieure ($y = 0$) si $b < \bar{b}$.

Supposons $b > \bar{b}$. Alors pour tout $t > T$ on a $y'_b(t) > 0$ et $y_b(t) > y_b(T) > 0$; par conséquent y_b est strictement croissante sur $[T, +\infty[$ et tend donc en $+\infty$ vers une limite $L \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Supposons L finie. Alors $f(t, y_b(t))$ tend vers $a = \arctan(L) > 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ donc il existe $T_1 \geq T$ tel que $y'_b(t) > a/2$ pour $t > T_1$, et donc $y_b(t) > y_b(T_1) + (a/2)(t - T_1)$ pour $t > T_1$. Comme le membre de droite tend vers $+\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$, ceci contredit l'hypothèse $L < +\infty$. On a donc $L = +\infty$.

Supposons maintenant $b < \bar{b}$. Alors pour tout $t > T$ on a $y'_b(t) < 0$ et $y_b(t) < y_b(T) < 0$; par conséquent y_b est strictement décroissante sur $[T, +\infty[$ et donc tend en $+\infty$ vers une limite $L \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$. Supposons L finie. Alors $f(t, y_b(t))$ tend vers $a = \arctan(L) < 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ donc il existe $T_1 \geq T$ tel que $y'_b(t) < a/2$ pour $t > T_1$, et donc $y_b(t) < y_b(T_1) + (a/2)(t - T_1)$ pour $t > T_1$. Comme le membre de droite tend vers $-\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$, ceci contredit l'hypothèse $L > -\infty$. On a donc $L = -\infty$. \square

9. Tracer l'allure de l'isocline \mathcal{C}_0 et de plusieurs solutions y_b , illustrant les trois comportements décrits plus haut selon que b est égal, strictement supérieur, ou strictement inférieur à \bar{b} .

Correction.

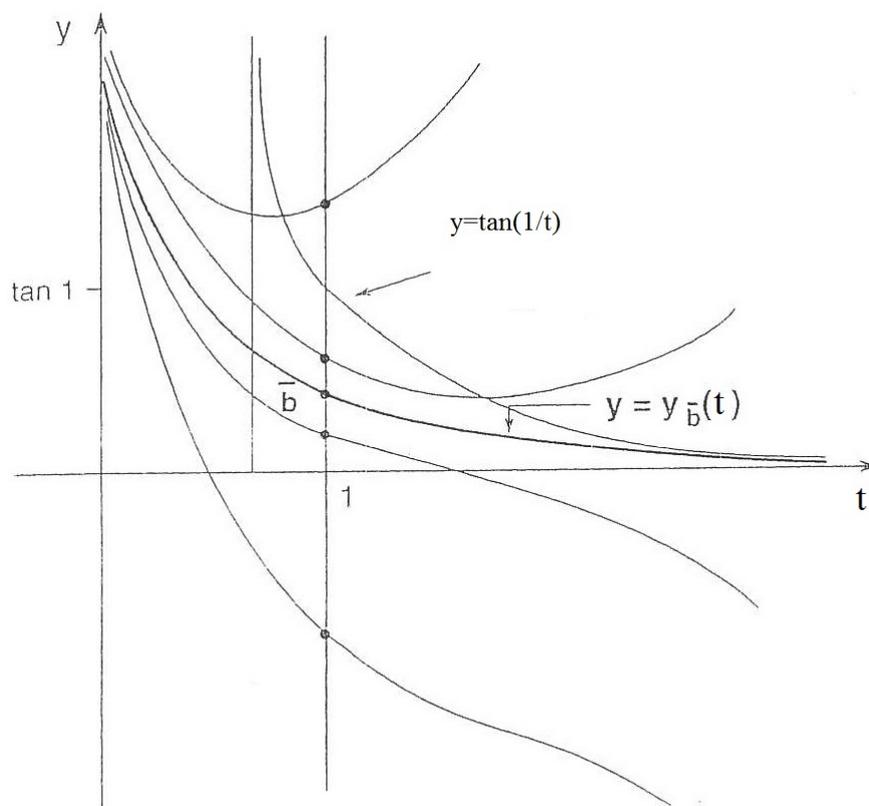


Fig. 8

\square