TD2: Conjugaisons, les groupes $SL_2(\mathbb{R})$ et $SU(1,1)$

1 Conjugaisons

Définition 1. Le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ ($SL_2(\mathbb{C})$) est le groupe de matrices deux à deux (de la forme $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$) avec coefficients réels (complexes) et déterminant 1, c'est-à-dire $ad - bc = 1$. Chaque élément correspond à une fonction $F_A(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Exercice 1. Considérer la matrice $M = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Dessiner le graphe de la fonction correspondante.

Définition 2. Soit deux matrices carrées A et B de même taille. On appelle $A^B = BAB^{-1}$ la **conjugaison** de A par B.

Exercice 2. Soit $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Donner l'expression de la fonction correspondante. Calculer M^T. Dessiner le graphe de la fonction correspondante.

Exercice 3. Calculer T^{-1}. Dessiner le graphe de $M^{T^{-1}}$ sans autres calculs.

Exercice 4. Soit $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$. Dessiner le graphe de M^S. Conclure sur le rôle de la conjugaison.

2 Les groupes $SL_2(\mathbb{R})$ et $SU(1,1)$ sont isomorphes

Soit $J = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$. On va considerer la fonction $c : SL_2(\mathbb{R}) \to SL_2(\mathbb{C})$ definie par $c(A) = A^J$.

Exercice 5. Montrer que c est une bijection entre $SL_2(\mathbb{R})$ et $SU(1,1)$.

Exercice 6. Montrer que pour tout A, B on a $c(AB) = c(A)c(B)$.

Une fonction qui vérifie les conditions de ces deux exercises est appelée un **isomorphisme de groupe**.

Exercice 7. Trouver l'image de $\mathbb{R}$ par F_J. Conclure qu'on peut identifier le cercle du plan complexe avec $\mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$.

3 Classification des éléments de $SL_2(\mathbb{R})$

Définition 3. La **trace** d'une matrice deux à deux $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est $tr(A) = a + d$.

Exercice 8. Montrer que la trace est préservée par conjugaison (pour aujourd'hui il suffira de le démontrer pour les matrices deux à deux).

On voudra comprendre l'action F_A d'une matrice $A \in SL_2(\mathbb{R})$ fixée sur $\mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$. On commence par étudier les points fixes - les points x tels que $F_A(x) = x$.

Exercice 9. On suppose que $A \neq \pm Id$. Remarquer que quitte à conjuguer par une matrice on peut supposer que ∞ n'est pas un point fixe de A. Calculer le nombre de points fixes en fonction de $tr(A)$.

On va considérer les cas correspondants:

Exercice 10. Soit A avec un point fixe. On dit que A est **parabolique**. Montrer que quitte à conjuguer on peut supposer que le point fixe est ∞. Décrire A dans ce cas. Conclure sur la dynamique de $F_{c(A)}$ pour une matrice A parabolique quelconque.

Exercice 11. Soit A avec deux points fixes. On dit que A est **hyperbolique**. Montrer que quitte à conjuguer on peut supposer qu'ils sont 0 et ∞. Décrire A et conclure.

Exercice 12. $\star$ Soit A sans point fixe. On dit qu'elle est **elliptique**. Montrer qu'elle est conjuguée à une rotation, c'est-à-dire une matrice de la forme $R_\theta = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$.

Indication: On pourrait trouver θ puis chercher une matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ qui envoie les points fixes complexes de A sur les points fixes complexes de R_θ.