TD3 : Nombres de rotation des homéomorphismes du cercle

1 Suites additives et sous-additives

Exercice 1. Considérons $F(x) = x + \theta$ et la suite des $a_n = F^n(x)$. Pour quels valeurs de x la suite est-elle additive / sous-additive?

Exercice 2. Montrer que la suite des $\sqrt{n}$ est sous-additive.

Exercice 3. Montrer que la suite des $-n^2$ est sous-additive.

Exercice 4. Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est additive, alors la suite $(\frac{a_n}{n})$ est constante.

Exercice 5. Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive, alors $a_{kl} \leq ka_l$ pour tout $k, l \in \mathbb{N}$.

2 Nombres de rotation dans $SU(1,1)$

Exercice 6. Montrer que pour $A \in SU(1,1)$, F_A est un homéomorphisme sur $S^1 = \{z \in \mathbb{C},\ \ |z| = 1\}$. On admet qu'en identifiant S^1 avec $[0,1[$, on peut considérer F_A comme un homéomorphisme du cercle.

Exercice 7. (Exercice de cours) Si F est un homéomorphisme du cercle, montrer qu'il admet un point fixe si et seulement si $\tau(F) = 0$.

Exercice 8. Déduire de l'exercice précédent les nombres de rotations des éléments de $SU(1,1)$.

3 Propriétés des nombres de rotation

Exercice 9. (Exercice de cours) Montrer que si F est un homéomorphisme du cercle, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\tau(F^m) = m\tau(F)$.

Exercice 10. Si F est un homéomorphisme du cercle, montrer

- $\tau(F) = p/q$ si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $F^q(x) = x + p$;
- $\tau(F) > p/q$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $F^q(x) > x + p$;
- $\tau(F) < p/q$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $F^q(x) < x + p$.

Exercice 11. Montrer que si F est un homéomorphisme du cercle, $\tau(F^{-1}) = -\tau(F)$.

Exercice 12. Montrer que si $f : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1$ a un point périodique de période m, tout autre point périodique a la même période.

On va se concentrer maintenant sur les homéomorphismes dont le nombre de rotation n'est pas rationnel.

Définition 1. Un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}$ est dense si, pour tout intervalle $]a,b[\subset \mathbb{R}$, $\Lambda \bigcap]a,b[\neq \emptyset$.

Exercice 13. Montrer que si $\omega \notin \mathbb{Q}$, l'ensemble $\{n\omega + m | n, m, \in \mathbb{Z}\}$ est dense.

Exercice 14. Soit F un homéomorphisme de cercle avec $\tau(F) = \omega \notin \mathbb{Q}$. On note $\Lambda_F = \{F^n(x_0) + m | n, m \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que l'application $T : \Lambda_F \to \Lambda$ définie par

$$T(F^n(x_0) + m) = n\omega + m$$

est une bijection croissante.

Exercice 15. (Théorème de Poincaré) Montrer qu'un homéomorphisme du cercle F avec un nombre de rotation irrationnel ω et orbite dense est conjugué à une rotation.