TD4: Champs de vecteurs, Équations différentielles associées, Topologie de $\mathbb{R}^2$

1 Champs de vecteurs

Exercice 1. Dessiner le champ $v(X) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$.

Exercice 2. Dessiner le champ $v_\alpha(X) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} X$ pour $\alpha \neq \frac{\Pi}{2} + k\Pi$.

2 Une exemple d'équation différentielle

Considerons l'équation (E_1) $x'(t) = tx(t)$.

Exercice 3. Donner l'expression du champ vectoriel associé. Dessinez-le.

Exercice 4. Trouver les valeurs des solutions constants. Est-il possible qu'une solution non-constante prends un de ces valeurs en un point?

On considère maintenant une solution non-constante.

Exercice 5. On écrit (E_1) sur la forme $\frac{x'(t)}{x(t)} = t$. Le résoudre.

Exercice 6. Considerons l'équation (E_2) $x'(t) = tx^2(t)$. Compléter les mêmes étapes.

Exercice 7. Pareil pour (E') $x'(t) = tx^2(t) - x(t)$.

3 Fondamentales sur la topologie de $\mathbb{R}^2$

Exercice 8. Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < |x-1| < 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq y\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| < 1, |y| \leq 1\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}\}$$

Exercice 9. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion dénombrable de disques ouverts.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{R}\}$ son graphe et U le complémentaire de Γ_f dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que U est ouvert.

Exercice 11. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que $U = \{X \in \mathbb{R}^2 | g(X) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Retrouver le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 12. Considerons la fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ défini par $h(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Montrer que le complémentaire de son graphe Γ_h n'est pas ouvert.