Feuille d'exercices n° 2

Normes matricielles, conditionnement, valeurs singulières

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\mathbf{K}^n$, $|||\cdot|||$ et $\mathrm{cond}(\cdot)$ la norme subordonnée et le conditionnement associés.

Exercice 2.0 *Décomposition en valeurs singulières : échauffement*

Donner la décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes :

1. La matrice identité.
2. Une matrice orthogonale.
3. Une matrice diagonale.
4. Une matrice $n \times n$ de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
5. Une matrice $m \times n$ de la forme
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
6. Soit A une matrice carrée inversible. Comment s'exprime la décomposition en valeurs singulières de A^{-1} en fonction de celle de A ?

Exercice 2.1 *Changement de base*

Rappel : *Représentation matricielle d'une application linéaire.*

Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, avec $\dim E = n$ et $\dim F = m$. Fixons deux bases, $\beta = (e_j)_{1\le j\le n}$ une base de E et $\beta' = (f_i)_{1\le i\le m}$ base de F.

Soit $u : E \to F$ une application linéaire. La matrice de u relativement aux bases β et β' *est la matrice dont le j^e vecteur colonne contient les coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base β' pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. On la note $Mat_{\beta,\beta'}(u)$. Si $E = F$ et $\beta = \beta'$, on la note $Mat_\beta(u)$.*

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, soit $\mathcal{B}' = \{f_1, \ldots, f_n\}$ une autre base de E. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $(p_{1,j}, \ldots, p_{n,j}) \in \mathbf{K}^n$ tel que $f_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i$.

On appelle *matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$*, ou *matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$*, la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (p_{i,j})_{1\le i,j\le n}$: la j^e colonne de $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est constituée des coordonnées de $f_j \in \mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

1. Soit $x \in E$. On note $X \in \mathbf{K}^n$ le vecteur (colonne) des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et $X' \in \mathbf{K}^n$ le vecteur (colonne) des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$. Montrer que $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X'$.
2. Vérifier que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est la matrice de l'application identité de E, Id_E, relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$: $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$.
3. Vérifier que $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}$.
4. Montrer que pour tout endomorphisme U de E on a
$$Mat_{\mathcal{B}}(U) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}'}(U) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}'}(U) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$
5. *Application.* Dans $\mathbf{R}^2$, on considère les deux bases suivantes : $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ avec
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
On considère l'endomorphisme $U : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tel que
$$Mat_{\mathcal{B}}(U) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) 1^{re} *méthode.* Exprimer $U(f_1)$ et $U(f_2)$ en fonction de f_1 et f_2. En déduire la représentation matricielle de U dans la base $\mathcal{B}'$.
   (b) 2^{e} *méthode.* Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. En déduire la représentation matricielle de U dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2.2 *Décomposition en valeurs singulières.*

1. Donner la décomposition en valeurs singulières $A = PDQ^T$ (en précisant P, D et Q) de
$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & -12 & 3 \\ 4\sqrt{3} & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$
2. Donner la décomposition en valeurs singulières de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
et tracer dans le plan (de la feuille !) l'image du cercle unité par l'application linéaire associée à A.

Exercice 2.3 *Norme de Frobenius.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On rappelle que la norme de Frobenius est définie par
$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

1. Montrer que la norme de Frobenius est une norme matricielle et qu'elle est donnée par :
$$\|A\|_F^2 = \mathrm{Tr}(A^* A).$$
2. Montrer que la norme de Frobenius n'est pas une norme subordonnée.
3. Montrer que si $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est unitaire,
$$\|UA\|_F = \|AU\|_F = \|A\|_F.$$
4. Montrer que si A est une matrice normale, de valeurs propres $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, alors
$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Exercice 2.4 *Normes subordonnées $\|\!| \cdot |\!\|_\infty$ et $\|\!| \cdot |\!\|_1$.* On rappelle la définition des normes ℓ^∞ et ℓ^1 sur $\mathbf{K}^n$: pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$, $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

On note $\|\!| \cdot |\!\|_\infty$ et $\|\!| \cdot |\!\|_1$ les normes subordonnées sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$: pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,

$$\|\!| A |\!\|_\infty = \max_{x\in\mathbf{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \qquad \text{et} \qquad \|\!| A |\!\|_1 = \max_{x\in\mathbf{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}.$$

Montrer les deux formules suivantes : pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,

$$\|\!| A |\!\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \qquad \text{et} \qquad \|\!| A |\!\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

Exercice 2.5 *Norme subordonnée à la norme 2.*

On rappelle la définition du produit scalaire canonique sur $\mathbf{K}^n$ et de la norme associée : pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$, tout $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$.

On note $\|\!| \cdot |\!\|_2$ la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$: pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,

$$\|\!| A |\!\|_2 = \max_{x\in\mathbf{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Montrer que la norme 2 sur $\mathbf{K}^n$ est invariante par transformation unitaire : si U est tel que $U^*U = \mathrm{I}_n$, alors pour tout $x \in \mathbf{K}^n$, $\|Ux\|_2 = \|x\|_2 = \|U^*x\|_2$.
2. Montrer que la norme 2 subordonnée est invariante par transformation unitaire : si U est tel que $U^*U = \mathrm{I}_n$, alors
$$\|\!| A |\!\|_2 = \|\!| UA |\!\|_2 = \|\!| AU |\!\|_2 = \|\!| U^*AU |\!\|_2.$$
3. Montrer que si A est une matrice normale, alors $\|\!| A |\!\|_2 = \rho(A)$, où $\rho(\,\cdot\,)$ désigne le rayon spectral.
4. Montrer que $\|\!| A |\!\|_2 = \sqrt{\|\!| A^*A |\!\|_2}$.
5. Montrer que
$$\|\!| A |\!\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|\!| A^* |\!\|_2.$$
6. *Conditionnement associé à la norme 2.* On suppose A inversible, on note $\mathrm{cond}_2(A) = \|\!| A |\!\|_2 \|\!| A^{-1} |\!\|_2$ le conditionnement associé à la norme 2. Ordonnons $0 < \mu_1(A) \leq \ldots \leq \mu_n(A)$ les racines carrées des valeurs propres de A^*A, *i.e. les valeurs singulières de* A.
   (a) Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$.
   (b) On suppose de plus que A est une matrice normale et on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|}$.

Exercice 2.6 *Équivalence des normes et des conditionnements.*

1. Montrer que si deux normes vectorielles $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_\#$ vérifient $C_1\|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_\# \leq C_2\|\cdot\|_*$ pour un couple (C_1, C_2) de réels strictement positifs alors les normes subordonnées vérifient

$$\frac{C_1}{C_2}\|\!|\cdot|\!\|_* \leq \|\!|\cdot|\!\|_\# \leq \frac{C_2}{C_1}\|\!|\cdot|\!\|_*.$$

2. En utilisant les formules démontrées aux exercices précédents, montrer les relations suivantes, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Le cas échéant donner les inégalités associées sur les conditionnements.
   (a) $\|\!|A|\!\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\,\|\!|A|\!\|_2$.
   (b) $\max\limits_{1\leq i,j\leq n} |A_{i,j}| \leq \|\!|A|\!\|_2 \leq n\left(\max\limits_{1\leq i,j\leq n} |A_{i,j}|\right)$.
   (c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|\!|A|\!\|_\infty \leq \|\!|A|\!\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|\!|A|\!\|_\infty$.
   (d) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|\!|A|\!\|_1 \leq \|\!|A|\!\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|\!|A|\!\|_1$.
   (e) $\|\!|A|\!\|_2 \leq \sqrt{\|\!|A|\!\|_\infty \|\!|A|\!\|_1}$.
   (f) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|\!|A|\!\|_p \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\,\|\!|A|\!\|_p$ pour $p = 1$ et $p = \infty$.

Exercice 2.7 *Norme et inversibilité.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice inversible, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{K}^n$ et $\|\!|\cdot|\!\|$ la norme subordonnée associée.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{K}^n$, $\|Ax\| \geq \dfrac{\|x\|}{\|\!|A^{-1}|\!\|}$.
2. Soit $E \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice telle que $\|\!|E|\!\| < \dfrac{1}{\|\!|A^{-1}|\!\|}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{K}^n$,

$$\|Ax + Ex\| \geq \left(\frac{1}{\|\!|A^{-1}|\!\|} - \|\!|E|\!\|\right)\|x\|.$$

   En déduire que $A + E$ est inversible.
3. Comment s'énonce le résultat qu'on vient de montrer si $A = I_n$?

Exercice 2.8 *Interprétations du conditionnement.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice inversible.

1. (a) Soit $b \in \mathbf{K}^n$ non nul, $\Delta b \in \mathbf{K}^n$. Soit $x \in \mathbf{K}^n$ non nul et $\Delta x \in \mathbf{K}^n$ tels que $Ax = b$ et $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Montrer que

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \;\leq\; \mathrm{cond}(A)\,\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\,,$$

   (b) Déterminer deux vecteurs b et Δb tels qu'on ait égalité entre les deux membres de l'inégalité précédente.
   (c) Montrer de même que si $Ax = b$ et $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$, alors

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \;\leq\; \mathrm{cond}(A)\,\frac{\|\!|\Delta A|\!\|}{\|\!|A|\!\|},$$

   puis que l'on peut trouver un vecteur b non nul, une matrice ΔA et un vecteur Δx vérifiant les relations ci-dessus et tels que l'on ait égalité entre les deux membres de l'inégalité précédente.

2. (a) Montrer (en utilisant les résultats de l'exercice précédent) que pour toute matrice singulière B, on a
$$\frac{1}{\mathrm{cond}(A)} \leq \frac{\|A-B\|}{\|A\|}.$$
(b) Soit $u \in \mathbf{K}^n$ tel que $\|u\|_2 = 1$ et $\|A^{-1}u\|_2 = \|A^{-1}\|_2$. On pose $B_0 = A - \dfrac{u(A^{-1}u)^*}{\|A^{-1}\|_2^2}$.
Montrer que $\|A - B_0\|_2 = \dfrac{1}{\|A^{-1}\|_2}$ et en déduire que
$$\frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)} = \min\left\{\frac{\|A-B\|_2}{\|A\|_2} \;\middle|\; B \text{ singulière}\right\}.$$
Autrement dit, plus une matrice est mal conditionnée, plus elle est proche d'être singulière donc difficile à inverser numériquement, et réciproquement.

Exercice 2.9 *Un exemple.* On note pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit
$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre le système $A_\varepsilon x = b$ pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+\varepsilon \end{pmatrix}$
2. Estimer à l'aide de l'exercice précédent la valeur de $\mathrm{cond}(A_\varepsilon)$ et comparer à la valeur exacte de $\mathrm{cond}(A_\varepsilon)$.