Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2020-2021

Analyse matricielle – L3

Feuille d'exercices n° 3

DÉCOMPOSITIONS

Exercice 3.1 **Vrai ou Faux ?**

1. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de Choleski.
2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique définie positive.
3. La matrice B ci-dessus admet une décomposition LU.
4. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ s'écrit de la forme $C^T C$.
5. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de Choleski $A = C^T C$ avec $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
6. Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) La matrice DD^T admet une décomposition de Choleski.
   (b) La matrice $D^T D$ admet une décomposition de Choleski.

Exercice 3.2 **Décompsition LU**

1. Donner la décomposition LU de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $PA = LU$ pour une matrice P de permutation à déterminer, avec L trianguleaire inférieure et U triangulaire supérieure.
3. Calculer la décomposition LU de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.3 **Décompsition de Choleski**

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Considérons la matrice A_n carrée de taille n dont les coefficients sont donnés par

$$(A_n)_{i,j} = \min(i, j).$$

1. Montrer que pour tout n on a $\det(A_n) = 1$.
2. Échelonner les matrices A_2 et A_3. Montrer que ces matrices sont définies positives et donner leur décomposition de Choleski.
3. "Deviner" la décomposition de Choleski de la matrice A_n.