Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2020-2021

Analyse matricielle – L3

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 6

COMPLÉMENTS

Dans l'exercice suivant, on pourra utiliser librement le thorème de Gershgorin (exercice 5.4).

Exercice 6.1 Matrices à diagonale dominante

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice à *diagonale dominante*, c'est à dire vérifiant l'inégalité

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

pour tout i.

1. Montrer que A est inversible.
2. Soit J la matrice de Jacobi de A. Montrer que $|||J|||_\infty < 1$ et en déduire que la méthode de Jacobi converge pour A.
3. Soit G la matrice de Gauss–Seidel de A. Montrer que si λ est valeur propre de G, alors 0 est valeur propre de
$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}.$$
En déduire que $|\lambda| < 1$ et que la méthode de Gauss–Seidel converge pour A.

Exercice 6.2 Méthode de la puissance

La méthode de la puissance est un algorithme pour calculer la valeur propre de plus grand module d'une matrice, et un vecteur propre associé.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice diagonalisable, et $(u_i)_{1 \le i \le n}$ une base formée de vecteurs propres de A, avec $Au_i = \lambda_i u_i$. On suppose que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p$ et $|\lambda_i| < |\lambda_1|$ pour $p < i \le n$.

1. Soit $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$. Que vaut
$$\lim_{k \to \infty} \frac{A^k x_0}{\lambda_1^k} \ ?$$
On note U l'ensemble des vecteurs x_0 pour lesquels cette limite est non nulle. Montrer que U est un ouvert dense de $\mathbf{C}$.
2. Si $y, z \in \mathbf{C}^n$ sont des vecteurs vérifiant $\|y\|_2 = \|z\|_2 = 1$, on pose
$$d(y,z) = \inf_{0 \le \theta \le 2\pi} \|y - e^{i\theta} z\|_2.$$
Soit $x_0 \in U$ et (x_k) la suite définie par
$$x_k = \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2}.$$

Montrer qu'il existe un vecteur unitaire x_∞ tel que

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, x_\infty) = 0.$$

Montrer que x_∞ est un vecteur propre de valeur propre λ_1. Montrer de plus que

$$\lambda_1 = \lim_{k\to\infty} \langle Ax_k, x_k\rangle.$$

3. Comment peut-on adapter l'algorithme précédent pour trouver la valeur propre de plus petit module de A ?

Exercice 6.3 **Un exemple où la méthode de la puissance ne converge pas**
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs et vecteurs propres de A.
2. Soit $x_0 \in \mathbf{C}^2$ non nul.
   (a) Calculer $(A^k x)_{k\in\mathbf{N}}$.
   (b) Comme à l'exercice précédent, on pose $x_k = \left(\frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2}\right)$. À quelle condition sur x la suite

   $$(\langle Ax_k, x_k\rangle)_{k\in\mathbf{N}}$$

   converge-t-elle vers une valeur propre de A ?

Exercice 6.4 (Difficile, mais bon à savoir) Montrer que l'ensembles des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes forme un ouvert dense de $M_n(\mathbf{C})$.

L'exercice précédent implique la méthode de la puissance marche pour une matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$ et un vecteur initial x_0 *génériques.*