I.— Équations cubiques

Exercice 1 (Méthode de Cardan (1501-1576) / Tartaglia (1500-1557))
Soient $p, q \in \mathbb{R}$.

On va résoudre :

$$(E) \quad z^3 + pz + q = 0 \ .$$

— *Vérifier que toute équation cubique se ramène à une équation de cette forme.*

a) Soient z_1, z_2, z_3 *les 3 racines de* (E) *(au sens où :* $z^3 + pz + q = (z - z_1)(z-z_2)(z-z_3)$*). Exprimer le discriminant* $\Delta := (z_1-z_2)^2(z_2-z_3)^2(z_1-z_3)^2$ *en fonction de* p *et* q.

b) Montrer que :

$$\begin{aligned}
\Delta = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^3 + pz + q \text{ a une racine réelle double} \\
\Delta > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^3 + pz + q \text{ a 3 racines réelles simples} \\
\Delta < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^3 + pz + q \text{ a 2 racines complexes conjuguées et 1 racine réelle}
\end{aligned}$$

c) Montrer que $z = u + v$ *est racine de* $z^3 + pz + q$ *si*

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases} .$$

d) En déduire que les trois racines de l'équation

$$z^3 + pz + q = 0$$

sont données par les formules de Cardan :

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)}$$

$$z_2 = j\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)} + j^2\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)}$$

$$z_3 = j^2\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)} + j\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)}$$

(où si $\Delta > 0$, on choisit les racines cubiques réelles et si $\Delta < 0$, on choisit deux racines cubiques de produit -$\frac{p}{3}$).

Applications

e) Résoudre $z^3 + 3z + 1 = 0$ et $z^3 - 3z + 1 = 0$.

f) Vérifier que :

$$1 = \sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$$

en considérant l'équation $z^3 + z - 2 = 0$. De même vérifier que

$$4 = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} \ .$$

g) Apliquer la méthode de Cardan à $z^3 - 15z - 4 = 0$.

Exercice 2 (Méthode de Lagrange) *Soient z_1, z_2, z_3 les trois racines du polynôme $P = z^3 + pz + q$.*

a) Vérifier que le polynôme $(X + jY + j^2Z)^3$ ne prend que deux valeurs lorsque l'on spécialise X, Y, Z en toutes les permutations possibles du triplet (z_1, z_2, z_3). Montrer que ces deux valeurs sont :

$$A := (z_1 + jz_2 + j^2 z_3)^3 \text{ et } B := (z_1 + j^2 z_2 + jz_3)^3 \ .$$

b) Trouver une équation de degré 2 dont A et B sont les racines.

c) Retrouver les formules de Cardan.

Exercice 3 (Résolution trigonométrique) *Soit $z^3 + pz + q = 0$ une équation cubique réelle de discriminant > 0.*

a) Montrer que $p < 0$ et $\left|\frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}}\right| < 1$.

b) Montrer que les racines de l'équation sont :

$$z_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\theta,\ z_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\theta + \frac{2\pi}{3}),\ z_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\theta + \frac{4\pi}{3})$$

où θ est le réel :

$$\theta = \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}}\right) \ .$$

Indication : on rappelle que $4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t$.

Exercice 4 *Soit $P := a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polynôme réel de degré 4. Soit Δ son discriminant. Montrer que $\Delta < 0$ si et seulement si l'équation $P = 0$ a exactement deux racines réelles.*