X.— Résultant et discriminant

Exercice 1 *Soient $f := f_m X^m + ... + f_0, g := g_n X^n + ... + g_0$ deux polynômes à coefficients dans un anneau A factoriel.*

On définit le résultant de f, g : $R(f, g)$, comme le déterminant de la matrice de taille $m + n \times m + n$:

$$\begin{pmatrix}
f_m & f_{m-1} & \cdots & f_0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & f_m & f_{m-1} & \cdots & f_0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & f_m & f_{m-1} & \cdots & f_0 \\
g_n & g_{n-1} & \cdots & g_0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & g_n & g_{n-1} & \cdots & g_0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & g_n & g_{n-1} & \cdots & g_0
\end{pmatrix}$$

a) On suppose que A est factoriel. Montrer que sont équivalentes :

i) f, g ont un facteur commun non constant dans $A[X]$;

ii) il existe $F, G \in A[X]$ non nuls tels que : $Gf = Fg$ avec : $\deg F < \deg f$ et $\deg G < \deg g$;

iii) $R(f, g) = 0$.

b) Montrer qu'il existe $h, k \in A[X]$ tels que :

$$R(f, g) = hf + kg$$

et $\deg h \leq n - 1$, $\deg k \leq m - 1$.

c) Montrer que si

$$f = f_m(X - x_1)...(X - x_m)$$

$$g = g_n(X - y_1)...(X - y_n)$$

alors :

$$R(f, g) = f_m^n g_n^m \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (x_i - y_j)$$

(indication : il suffit de traiter le cas où $f_m = g_n = 1$ et où les x_i, y_j sont des indéterminées : montrer que $R(f, g)$ est divisible par $\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (x_i - y_j)$).

d) **Élimination :** *En utilisant le résultant, trouver une équation pour la courbe paramétrée :*

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ y = \frac{2t}{1+t^2}\ .$$

Exercice 2 *Soit $f := a_n X^n + ... + a_0 \in k[X]$ un polynôme de degré n.*

On définit le discriminant de f par :

$$\Delta(f) := a_n^{2n-2} \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2$$

où $x_1, ..., x_n$ sont les racines de f dans une extension de corps de k.

a) Montrer que $\Delta(f) = (-1)^{n(n-1)/2} R(f, f') a_n^{n-k-2}$ où k est le degré de f'. En particulier $\Delta(f) \in k$.

b) Montrer qu'en caractéristique nulle :

$$\Delta(f) = (-1)^{n(n-1)/2} a_n^{n-1} \prod_{i=1}^{n} f'(x_i)$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} n^n a_n^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} f(y_j)$$

où les y_j sont les racines de f'.

c) Montrer que si f est un polynôme réel sans racines réelles, alors n est pair et le signe de $\Delta(f)$ est $(-1)^{n/2}$.

d) On pose $s_k := x_1^k + ... + x_n^k$ pour tout entier $k \geq 1$.

Montrer que

$$\Delta(f) = \begin{vmatrix} n & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n} \end{vmatrix}$$

si f est unitaire.

f) On suppose que f est un polynôme réel unitaire. Soit $V := \mathbb{R}[X]/(f)$. Si $a \in V$, on note

$$\mathrm{tr}(a)$$

la trace de l'endomorphisme : $V \to V\ ,\ v \mapsto av$.

On note ϕ la forme bilinéaire symétrique sur V définie par :

$$\phi(v, w) := \mathrm{tr}(vw)\ .$$

Donner la matrice de ϕ dans la base $1, ..., X^{n-1}$. Soit (p, q) la signature de ϕ. Montrer que le nombre de racines réelles distinctes de f est $p + q$.

Exercice 3 *Calculer le discriminant du polynôme cyclotomique $\Phi_n(X)$.*

Indications : Calculer d'abord $|\Delta(\Phi_n)|$.