XII.— Calculs de groupes de Galois

Exercice 1 *Montrer que le polynôme* $X^5+10X^3-10X^2+35X-18$ *a pour groupe de Galois sur* $\mathbb{Q}$ *le groupe alterné* A_5.

Exercice 2 *Déterminer le groupe de Galois de* X^5+10X^3-15 *sur* $\mathbb{Q}$.

Exercice 3 *Soit* $P := X^7-56X-48$.

a) Montrer que

$$P = (X^2+6X-6)(X^2-9X+5)(X^3+3X^2-5X-3) \bmod 23\ .$$

b) Montrer que le groupe de Galois de P *sur* $\mathbb{Q}$ *est contenu dans* A_7.

c) En utilisant a), montrer que le groupe de Galois de P *sur* $\mathbb{Q}$ *est* A_7 *indication : vérifier d'abord que :*

$$\langle (123),(1234567)\rangle = ... = \langle (127),(1234567)\rangle\ .$$

Exercice 4 *a) Soit* G *un sous-groupe transitif de* S_n. *Montrer que si* G *contient une transposition et un* $(n-1)$ *cycle, alors* $G=S_n$.

b) Soit f_1 *un polynôme entier unitaire de degré* n *irréductible modulo* 2. *Soit* f_2 *un polynôme unitaire entier de degré* n *qui a un facteur irréductible de degré* $n-1$ *modulo* 3. *Soit* f_3 *un polynôme unitaire entier de degré* n *qui modulo* 5 *a un facteur de degré* 2 *et* 1 *ou* 2 *facteurs de degrés impairs (distincts) tous irréductibles. Montrer que de tels polynômes existent si* $n>3$ *et que dans ce cas, le polynôme*

$$f := -15f_1+10f_2+6f_3$$

a pour groupe de Galois S_n *sur* $\mathbb{Q}$.