XIII.— Norme, trace et discriminant

Exercice 1 *Soient* p *un nombre premier et* $r \geq 1$*. Soit* z *une racine primitive* p^r-*ième de l'unité. On pose* $\pi := 1 - z$*.*

a) Déterminer $\Phi_{p^r}(X)$ *et en déduire* $N_{\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}}(\pi)$*.*

On note B *l'anneau des entiers (sur* $\mathbb{Z}$*) du corps* $\mathbb{Q}(z)$*.*

b) Soit P *la matrice de passage d'une* $\mathbb{Z}-$*base de* B *dans la base* $1, ..., z^{n-1}$ *(vues comme* $\mathbb{Q}-$*base de* $\mathbb{Q}(z)$*). En utilisant le théorème de la base adaptée, montrer que :*

$$\text{dét}\, P = \pm\, |B/J|$$

où $J = \mathbb{Z}[z]$*.*

En déduire que $\text{Disc}(1, ..., z^{n-1}) = |B/J|^2\, d$ *où* d *est le discriminant d'une* $\mathbb{Z}-$*base de* B*.*

c) On rappelle que $\text{Disc}(1, ..., z^{n-1})$ *est aussi le discriminant de* Φ_{p^r}*. Montrer que* $p^N B \subseteq J$ *pour un* N *assez grand (cf. la formule du discriminant des polynômes cyclotomiques).*

d) Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to B/\pi B$ *est un isomorphisme. Montrer que*

$$\mathbb{Z}[z] + \pi B = B$$

puis que :

$$\mathbb{Z}[z] + \pi^m B = B$$

pour tout $m \geq 1$*. Montrer que* $\pi^{\varphi(p^r)} = pu$ *pour un certain* $u \in B^\times$ *(indication : vérifier que si* z_1, z_2 *sont des racines primitives* $N-$*ièmes de l'unité, alors* $(1 - z_1)/(1 - z_2)$ *est un entier algébrique inversible). En déduire que :*

$$\mathbb{Z}[z] + p^m B = B$$

pour tout $m \geq 1$*.*

e) Montrer que $B = \mathbb{Z}[z]$*.*

Exercice 2 *Soient* K, L *deux extensions de* $\mathbb{Q}$ *de degrés respectifs* m, n *telles que* $[KL : \mathbb{Q}] = mn$*.*

a) Montrer que pour tous plongements σ *de* K*,* τ *de* L *dans* $\mathbb{C}$*, il existe un plongement de* KL *dans* $\mathbb{C}$ *qui prolonge* σ *et* τ*.*

Soient R, S *les anneaux des entiers de* K, L*. Soient*

$$\{r_1, ..., r_m\}\ ,\ \{s_1, ..., s_n\}$$

des $\mathbb{Z}-$*bases de* R *et* S*. On note* T *l'anneau des entiers de* KL *et* RS *le sous-anneau de* T *engendré par les produits* rs*,* $r \in R, s \in S$*.*

b) Montrer que

$$RS \subseteq T \subseteq d^{-1}RS$$

où d est le pgcd des discriminants de R et S.

Indications : soit $a \in T$. Vérifier que $a = \sum_{i,j} \frac{c_{i,j}}{q} r_i s_j$ pour certains entiers $c_{i,j}$ et un entier q non nul premier avec l'ensemble des $c_{i,j}$. On note $\sigma_1, ..., \sigma_n$ les plongements de L dans $\mathbb{C}$. On note encore $\sigma_1, ..., \sigma_n$ les $K-$plongements de KL dans $\mathbb{C}$. Exprimer, pour tout j,

$$\sum_i \frac{c_{i,j}}{q} r_i$$

avec la matrice $(\sigma_i(s_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ et en déduire que :

$$\mathrm{Disc}(S) \sum_i \frac{c_{i,j} r_i}{q} \in T$$

pour tout j. En déduire que q divise $\mathrm{Disc}(S)$ *...*

c) Application : montrer que si z est une racine primitive $n-$ième de l'unité, alors $\mathbb{Z}[z]$ est l'anneau des entiers du corps cyclotomique $\mathbb{Q}[z]$.