XIV.— Théorème d'Artin-Schreier

Exercice 1 *Soit K/k une extension séparable finie. Supposons que $K = k(a)$ où a est un élément de polynôme minimal f sur k. La lettre t désigne une indéterminée.*

a) Montrer que $f(t) = N(t - a)$ où N est la norme de $K(t)/k(t)$.

b) Soit g un polynôme quelconque sur k. Étant donnée la décomposition en facteurs irréductibles sur K :

$$g(t) - a = \prod_i g_i(t)$$

montrer que :

$$(*) \quad f(g(t)) = \prod_i N(g_i(t))$$

(N est la même norme qu'en a)).

c) Montrer que si p est un facteur irréductible de $f(g(t))$ sur k, alors $g_i(t)$ divise $p(t)$ pour un certain i.

d) En déduire que pour ce i, $N(g_i(t))$ divise $p(t)$.

e) Montrer que $(*)$ est la décomposition de $f(g(t))$ en facteurs irréductibles sur k.

f) En déduire que $f(g(t))$ est irréductible sur $k \Leftrightarrow g(t) - a$ est irréductible sur K.

Exercice 2 *Soient k un corps, $a \neq 0$ et $n > 1$.*

a) Montrer que $x^{4m} + 4c^4 = (x^{2m} - 2cx^m + 2c^2)(x^{2m} + 2cx^m + 2c^2)$ et que $u^4 + v^4 + (u - v)^4 = 2\dfrac{(u^3 + v^3)^2}{(u + v)^2}$.

b) Montrer que l'équation $x^n = a$ est réductible sur $k \Leftrightarrow$

i) $a = b^d$ pour un $b \in k$ et un diviseur $d > 1$ de n ou

ii) 4 divise n et $a = -4c^4$.

Exercice 3 *Soit k un corps commutatif et $\overline{k}$ sa clôture algébrique. Montrer que si l'extension $\overline{k}/k$ est finie alors $[\overline{k} : k] \leq 2$ et $\overline{k} = k(\sqrt{-1})$. Montrer aussi que si $k \neq \overline{k}$, alors k est de caractéristique 0. Donner un exemple !*