XV.— Équations résolubles de degré p

Soit p un nombre premier.

Exercice 1 *Montrer que pour un sous-groupe transitif de S_p, sont équivalentes :*

i) G est résoluble ;

ii) G contient un sous-groupe distingué, transitif d'ordre p qui est son propre centralisateur ;

iii) G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p)$ qui contient les translations ;

iv) Tout élément non trivial de G fixe au plus un élément de $\{1, ...p\}$.

Indication : montrer :

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, Rightarrow] & ii \arrow[r, Rightarrow] & iii \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ll, Rightarrow, bend left] & iv \arrow[ll, Rightarrow, bend right] \end{tikzcd}$$

Exercice 2 *Soient $f = 0$ une équation irréductible de degré p sur un corps k de caractéristique nulle et E son corps de décomposition.*

Montrer que $f = 0$ est résoluble par radicaux si et seulement si E peut être engendré sur k par deux racines quelconques de f.