V.— Extensions galoisiennes finies

Exercice 1 Déterminer le corps de décomposition du polynôme $X^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$ et déterminer son groupe de Galois G. Décrire les sous-groupes de G et les extensions de $\mathbb{Q}$ correspondantes.

Exercice 2 Montrer que l'extension $\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q$ est galoisienne cyclique.

Exercice 3 Soit f un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré n. Montrer que son groupe de Galois est d'ordre un multiple de n. (*Indication : vérifier que le groupe de Galois agit transitivement sur les racines de* f).

Exercice 4 a) Montrer que le polynôme $f(X) := X^p - X - t$ est irréductible sur $\mathbb{F}_p(t)$.

b) Montrer que si α est une racine de f, alors $\alpha + i$ aussi ($i \in \mathbb{Z}$).

c) Montrer que le groupe de Galois de f sur $\mathbb{F}_p(t)$ est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 5 Soit k un corps de caractéristique p. Soit F une extension galoisienne cyclique de degré p de k. Soit σ un générateur du groupe de Galois de F sur k.

a) Montrer que l'endomorphisme $k-$linéaire de F :

$$S : \alpha \mapsto \alpha - \sigma(\alpha)$$

est nilpotent.

b) Soit $\alpha \in \ker S^2 \setminus \ker S$. Montrer que $\beta := \frac{\alpha}{\sigma(\alpha)-\alpha}$ vérifie $\sigma(\beta) = \beta + 1$.

c) En déduire que β vérifie une équation de la forme $X^p - X - a = 0$.

Exercice 6 *Soient trois corps :* $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3$. *On suppose que* K_3/K_1 *est galoisienne finie. Montrer que si* $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_3/K_1)$, *alors :*

$$\sigma \mathrm{Gal}(K_3/K_2)\sigma^{-1} = \mathrm{Gal}(K_3/\sigma(K_2)) \ .$$

Exercice 7 *Soit* G *le sous-groupe des automorphismes de* $\mathbb{C}(t)$ *engendré par :*

$$t \mapsto \zeta t \text{ et } t \mapsto t^{-1}$$

où ζ *est une racine primitive* $n-$*ième de* 1.

a) Montrer que G *est isomorphe au groupe diédral d'ordre* $2n$.

b) Montrer que $\mathbb{C}(t)^G = \mathbb{C}(t^n + t^{-n})$.

Exercice 8 *Soit k un corps. Soit Z le sous-groupe des matrices diagonales de* $\mathrm{GL}_2(k)$.

a) Soit $g \in \mathrm{GL}_2(k)$ une matrice qui laisse fixes les droites

$$x = 0, y = 0, y = x \ .$$

Montrer que $g \in Z$.

b) Montrer que le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(k)/Z$ engendré par les classes des matrices :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est isomorphe à S_3.

c) Soit K le sous-corps des fractions rationnelles $f \in k(t)$ invariantes par les changements de variables

$$t \mapsto 1 - t \text{ et } t \mapsto t^{-1} \ .$$

Montrer que $K = k\left(\frac{(t^2-t+1)^3}{t^2(t-1)^2}\right)$.

d) En déduire que l'extension :

$$k\left(\frac{(t^2 - t + 1)^3}{t^2(t-1)^2}\right) \subset k(t)$$

est galoisienne de groupe de Galois S_3.