VII.— Théorème d'Artin

Exercice 1 (théorème d'Artin) *Soient K un corps et G un sous-groupe des automorphismes de K. Soit $k := K^G$.*

a) Vérifier que k est un corps.

b) On suppose G fini d'ordre r. Supposons que $u_0, ..., u_r \in K$ sont $k-$linéairement indépendants. Montrer que le système d'équations en les inconnues x_j :

$$\sum_{j=0}^{r} {}^{\sigma}u_j x_j = 0 \ \ {}^{\forall}\sigma \in G$$

a (au moins) une solution non triviale dans K.

c) Soit $(a_0, ..., a_r) \in K$ une solution non triviale du système précédent avec le moins de termes non nuls possibles. Quitte à renuméroter les a_j et quitte à diviser par un coefficient non nul, on suppose que $a_0 = 1$. Montrer qu'il existe $\tau \in G$ et $1 \leq j \leq r$ tels que ${}^{\tau}a_j \neq a_j$.

d) En déduire une contradiction.

e) Montrer que $[K : k]$ est fini si et seulement si G est fini et que dans ce cas, $|G| = [K : k]$.

On dit que l'extension K/K^G est galoisienne finie de groupe de Galois G.

Exercice 2 *Le groupe S_n agit sur le corps des fractions rationnelles $k(X_1, ..;, X_n)$ par permutations des coordonnées. On note $\sigma_1 := X_1 + ... + X_n, ..., \sigma_n = X_1...X_n$ les fonctions symétriques élémentaires.*

a) Montrer que $k(X_1, ..., X_n)^{S_n} = k(\sigma_1, ..., \sigma_n)$.

b) On pose $\Delta := \prod_{1 \leq i < j \leq n}(X_i - X_j)$. Montrer que $k(X_1, ..., X_n)^{A_n} = k(\sigma_1, ..., \sigma_n, \Delta)$.

c) On pose $Y_k := X_1 + j^k X_2 + j^{2k} X_3 \in \mathbb{C}(X_1, X_2, X_3)$ pour $k = 1, 2, 3$.

Montrer que :

$$\mathbb{C}(X_1, X_2, X_3)^{A_3} = \mathbb{C}\left(\frac{Y_1^2}{Y_2}, \frac{Y_2^2}{Y_1}, Y_3\right)$$

(indication : $Y_1^3 = (Y_1^2/Y_2)^2 \, Y_2^2/Y_1$ et $\mathbb{C}(X_1, X_2, X_3) = \mathbb{C}(Y_1^2/Y_2, Y_2^2/Y_1, Y_3, Y_1)$).

Exercice 3 *Soit G le sous-groupe de $\mathrm{Aut}_k(k(t))$ engendré par $t \mapsto -t$ et $t \mapsto (1-t)$.*

a) Si k est de caractéristique nulle montrer que G est infini et que $k(t)^G = k$.

b) Si k est de caractéristique $p > 0$, montrer que G est fini et que $k(t)^G = k(t^p - t^{2p})$.

Exercice 4 *Soit G le groupe* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$.

a) Montrer que G est d'ordre $q^3 - q$.

b) Montrer que $\mathbb{F}_q(t)^G = \mathbb{F}_q\left(\frac{(t^{q^2}-t)^{q+1}}{(t^q-t)^{q^2+1}}\right)$ *(indication : pour montrer une des inclusions, trouver un système de générateurs « simples » de G).*

(On rappelle que $\mathrm{PGL}_2(k)$ *agit sur $k(t)$ via les homographies)*