

IX.— Construction à la règle et au compas

On identifie le plan et le corps \mathbb{C} . On définit par récurrence :

$$P_0 := \{0, 1\}$$

et si $n \geq 1$, P_n est l'ensemble des points de P_{n-1} et des points obtenus de la manière suivante :

— on trace toutes les droites reliant deux points de P_{n-1} , tous les cercles centrés en un point de P_{n-1} et de rayon une distance entre deux points de P_{n-1} ;

— on prend toutes les intersections obtenues (entre deux droites, deux cercles, un cercle et une droite).

On note $\mathcal{C} := \cup_{n \geq 0} P_n \subseteq \mathbb{C}$. C'est l'ensemble des points *constructibles à la règle et au compas*.

- 1) Déterminer P_1 et P_2 .
- 2) On rappelle que l'on peut construire à la règle et au compas la médiatrice de deux points, la perpendiculaire à une droite passant par un point donné, la parallèle à une droite passant par un point donné. En déduire que si z_1, z_2 sont constructibles, alors $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 z_2, z_1/z_2$ le sont aussi.
- 3) Montrer que les racines carrées d'un nombre constructible le sont aussi. En déduire que \mathcal{C} est le plus petit sous-corps de \mathbb{C} stable par la prise des racines carrées.
- 4) Vérifier qu'un nombre est constructible si et seulement s'il existe une suite finie d'extensions quadratiques $\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n$ telle que $x \in K_n$. Montrer que x est constructible à la règle et au compas si et seulement si son polynôme minimal a un groupe de Galois de degré une puissance de 2 (autrement dit si et seulement si x est dans une extension normale de \mathbb{Q} de degré une puissance de 2).
- 5) Montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible mais que $e^{2i\pi/17}$ l'est.
- 6) Montrer que $e^{2i\pi/n}$ est constructible si et seulement si $n = 2^r p_1 \dots p_s$ où $p_1 < \dots < p_s$ sont des nombres premiers de la forme : $p_i = 2^{2^{k_i}} + 1$.
- 7) Déterminer le degré de $\cos(2\pi/n)$ sur \mathbb{Q} .
Calculer $\Phi_{15}(X)$ et montrer que le polynôme minimal de $2 \cos(2\pi/15)$ est le polynôme : $X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X + 1$.