Examen partiel
mardi 22 mars 2011
14h15-16h15

Exercice 1 *Soit un entier* $n \geq 1$. *On note* $T_n(X) \in \mathbb{Q}[X]$ *le polynôme tel que :*

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)\ .$$

On pose $\zeta_n := e^{2i\pi/n}$.

2 *a) Montrer que* $T_n(X)$ *est de degré* n *et a pour coefficient dominant* 2^{n-1}.

0,5 *b) Montrer que* $\cos(2\pi/n)$ *est un nombre algébrique sur* $\mathbb{Q}$.

On note $\Psi_n(X) \in \mathbb{Q}[X]$ *le polynôme minimal unitaire de* $\cos(2\pi/n)$ *sur* $\mathbb{Q}$.

1 *c) Calculer* $\Psi_1(X)$, $\Psi_2(X)$, $\Psi_4(X)$, $\Psi_8(X)$.

1 + 1,5 *d) Montrer que* ζ_n *est de degré au plus 2 sur* $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n))$. *En déduire que si* $n \geq 3$, $\Psi_n(X)$ *est de degré* $\varphi(n)/2$ *où* φ *est la fonction indicatrice d'Euler.*

3 *e) En utilisant le groupe de Galois de* $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$, *montrer que si* $n \geq 3$, *les racines de* $\Psi_n(X)$ *sont les :*

$$\cos(2k\pi/n)$$

avec $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, k *premier à* n.

1 *f) On suppose que* $n = 2s + 1$ *pour un certain entier* $s \geq 1$. *Montrer que le polynôme*

$$T_{s+1}(X) - T_s(X)$$

a pour racines les

$$\cos(2k\pi/n)$$

$0 \leq k \leq s$.

2 *g) Déduire de f) et a) que :*

$$T_{s+1}(X) - T_s(X) = 2^s \prod_{d|n} \Psi_d(X)\ .$$

2 *h) En déduire le polynôme minimal de* $\cos(2\pi/7)$ *sur* $\mathbb{Q}$.

1 *i) Montrer que si* n *est pair de la forme* $n = 2s$, *alors :*

$$T_{s+1}(X) - T_{s-1}(X) = 2^s \prod_{d|n} \Psi_d(X)\ .$$

Exercice 2 *Soit* p *un nombre premier. Soit* $\overline{\mathbb{F}_p}$ *un corps algébriquement clos contenant le corps fini* $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. *Soit* q *une puissance de* p.

1,5 *a) Montrer qu'il existe un unique sous-corps de* $\overline{\mathbb{F}_p}$ *de cardinal* q. *On le note* $\mathbb{F}_q$.

1,5 *b) Soit $n \geq 1$. Montrer que dans la décomposition de $X^{q^n} - X$ en produits de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$, chaque facteur irréductible n'apparaît qu'une fois.*

c) Soit $P \in \mathbb{F}_q[X]$ un facteur irréductible de $X^{q^n} - X$ sur $\mathbb{F}_q$. Soit K le sous-corps de $\overline{\mathbb{F}_p}$ engendré par les racines de P. Montrer que $K \subseteq \mathbb{F}_{q^n}$. Soit d le degré de P. Quel est le degré de l'extension $\mathbb{F}_{q^n}$ sur K ? En déduire que $d|n$. 1 +2,5

2+0,5 *d) Montrer que*

$$X^{q^n} - X = \prod_P P$$

où P décrit l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ dont le degré divise n.

Exercice 3 *Soit $\mathbb{C}(t)$ le corps des fractions rationnelles en une variable t à coefficients complexes.*

On note G le sous-groupe des $\mathbb{C}-$automorphismes de $\mathbb{C}(t)$ engendré par les changements de variables :

$$t \mapsto i/t \text{ et } t \mapsto -t \ .$$

2+1 *a) Déterminer l'ordre de G. Quel est le degré de l'extension $\mathbb{C}(t)$ sur $\mathbb{C}(t)^G$?*

3 *b) Calculer le polynôme minimal de t sur $\mathbb{C}(t)^G$.*

c) En déduire que $\mathbb{C}(t)^G = \mathbb{C}(y)$ où $y := t^2 - t^{-2}$.