Fiche 2
5 février 2014

Exercice 1 (Automorphismes de corps).

1. Déterminer les automorphismes du corps $\mathbb{Q}$.
2. Déterminer le groupe d'automorphismes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
3. Dans ce point, nous déterminerons les automorphismes du corps $\mathbb{R}$. On fixe un endomorphisme f du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.
   – Montrer que f est $\mathbb{Q}$-linéaire.
   – Montrer que chacune des conditions ci-dessous implique les suivantes :
   (a) f est monotone ;
   (b) il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ tel que f est bornée sur $]a, b[$;
   (c) f est continue en 0 ;
   (d) f est continue.
   Montrer que si f a au moins une de ces propriétés, alors f est linéaire, et en déduire qu'elle est une homothétie.
   – Déduire la description des automorphismes de corps de $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les automorphismes continus du corps $\mathbb{C}$.
5. Montrer que l'identité est le seul automorphisme du corps $\mathbb{F}_p(t^{\frac{1}{p}})$ qui laisse fixe les éléments de $\mathbb{F}_p(t)$, où t est transcendant sur $\mathbb{F}_p$.

Exercice 2 (Groupes de Galois).

1. Déterminer, en justifiant votre réponse, lesquelles des extensions suivantes sont galoisiennes :
$$\mathbb{C}/\mathbb{R}\ ,\ \mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q\ (n \in \mathbb{N}^*)\ ,\ \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}\ ,\ \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}\ ,\ \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)/\mathbb{Q}\ (j \text{ racine troisième de l'unité})\ ,$$
$$L/\mathbb{Q}\ \ (L \text{ est le corps décomposition de } X^3 - 3X + 1)\ .$$
2. Déterminer le groupe d'automorphismes du corps de décomposition de $Q(X) = X^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$. Pour chaque sous-groupe déterminer son corps des invariants.
3. Déterminer le groupe d'automorphismes du corps de décomposition de $P(X) = X^3 - 3X + 1$ sur $\mathbb{Q}$.
4. Soit $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.
   (a) Déterminer $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\alpha)) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 3 (Fractions rationnelles).

1. Soient K un corps de caractéristique différente de 2, $E = K(t_1, \ldots, t_n)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans K et H le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(E/K(s_1, \ldots, s_n))$ correspondant au groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ (les $s_1, \ldots, s_n$ sont les polynômes symétriques élémentaires en $t_1, \ldots, t_n$ qui sont des transcendants (variables) indépendants). Montrer que le corps des invariants de H est $K(s_1, \ldots, s_n, \Delta)$.
2. Soient k un corps, t un élément transcendant sur k et G le groupe d'automorphismes de $k(t)$ (le corps des fractions rationnelles à coefficients dans k), engendré par les automorphismes

$$\sigma_1 \quad : t \longmapsto t^{-1} \quad \sigma_2 \quad : t \longmapsto 1 - t \quad .$$

   (a) Montrer que G est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.

   (b) On définit $f : t \longmapsto \frac{(t^2-t+1)^3}{t^2(t-1)^2}$. En utilisant le polynôme $(X^2 - X + 1)^3 - fX^2(X-1)^2$, montrer que $k(f) = k(t)^G$. En déduire que l'extension $k(t)/k(f)$ est galoisienne.
3. Soient F un corps, t un élément transcendant sur F et $E = F(t)$. Pour tout $u \in E$, on a une forme réduite $u = \frac{f(t)}{g(t)}$ avec f et g dans $F[t]$ et premiers entre eux. On définit le degré de u comme le maximum de ceux de f et de g. Soient X et Y deux indéterminées.

   (a) Montrer que $f(X) - Yg(X)$ est irréductible dans $F[X, Y]$. En déduire qu'il en est de même dans $F(Y)[X]$.

   (b) Déduire du point (a) que t est algébrique sur $F(u)$. Quel est son polynôme minimal ?

   (c) Conclure que $F(t) = F(u)$ si et seulement si u est de la forme $\frac{at+b}{ct+d}$ avec $ad - bc \neq 0$.

   (d) Décrire $\mathrm{Aut}(E/F)$.

Exercice 4 (Clôture algébrique réelle).

(a) Déterminer les extensions algébriques de $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que l'extension $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ n'est pas finie.

(c) On pose : $R = \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$. Montrer que $\overline{\mathbb{Q}} = R(i)$.

Remarque : le théorème d'Artin-Schreier affirme que si K/k est une extension finie et si K est algébriquement clos, alors k est de caractéristique 0, $[K : k] = 2$ et il existe $i \in K$ tel que $i^2 = -1$ et $K = k(i)$.