Examen partiel

Mardi 3 avril 2012, 14h15-16h45

Documents autorisés

1. Soit p un nombre premier. Montrer que le polynôme :

1 $$X^{p-1} + \ldots + 1$$

est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

2. Soit $\omega := e^{2i\pi/5}$.

1 a) Montrer que $\mathbb{Q}(\omega)$ est une extension galoisienne cyclique de $\mathbb{Q}$.

1 b) Montrer que $\mathbb{Q}(\omega) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\omega + \omega^{-1})$.

1 c) Montrer que :

$$\omega + \omega^{-1} = 2\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

et que :

1 $$\omega = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\ .$$

3. Soit $z := e^{2i\pi/11}$.

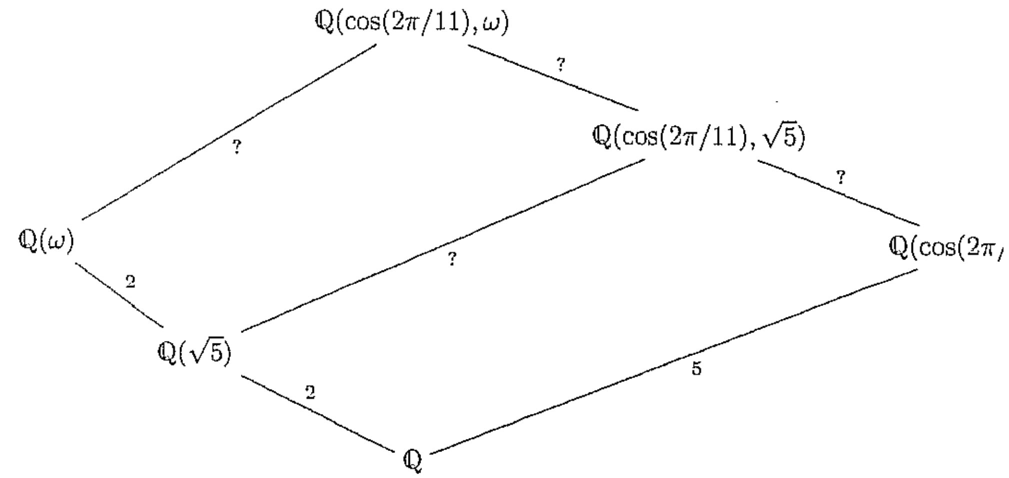
0,5+1 a) Justifier l'existence d'un automorphisme σ de $\mathbb{Q}(z)$ tel que $\sigma(z) = z^2$ et montrer que σ engendre le groupe de Galois de $\mathbb{Q}(z)$ sur $\mathbb{Q}$. On note $a_k := 2\cos(2k\pi/11)$, si $k \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

1+0,5 b) Montrer que $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_4$, $\sigma(a_4) = a_3$, $\sigma(a_3) = a_5$, $\sigma(a_5) = a_1$. Pourquoi a-t-on : $\mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \mathbb{Q}(z + z^{-1})$?

1 c) Montrer que $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/11))$ est une extension galoisienne cyclique de $\mathbb{Q}$ de degré 5.

d) Trouver les degrés manquants dans le diagramme suivant :

2



2 e) Justifier l'existence d'un $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/11))$–automorphisme η de $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/11), \omega)$ tel que $\eta(\omega) = \omega^2$ et d'un $\mathbb{Q}(\omega)$–automorphisme $\tilde{\sigma}$ de $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/11), \omega)$ qui prolonge σ.

f) Compléter le tableau suivant :

1

x	$\widetilde{\sigma}(x)$	$\eta(x)$	$\widetilde{\sigma}\eta(x)$	$\eta\widetilde{\sigma}(x)$
ω	ω	ω^2		
a_1	a_2	a_1		
a_2				
a_4				
a_3				
a_5				

1 En déduire l'ordre de $\widetilde{\sigma}\eta$.

g) On pose $K := \mathbb{Q}(\cos(2\pi/11), \omega)$. Compléter le tableau suivant avec les corps du diagramme ci-dessus :

1 + 2

G	$\lvert G\rvert$	K^G
$\langle\widetilde{\sigma}\eta\rangle$		$\mathbb{Q}$
$\langle\widetilde{\sigma}\eta^2\rangle$		
$\langle\widetilde{\sigma}\rangle$		
$\langle\eta\rangle$		
$\langle\eta^2\rangle$		
$\{1\}$	1	$\mathbb{Q}(\cos(2\pi/11), \omega)$

h) On pose :

$$V_1 := a_1 + a_2\omega + a_4\omega^2 + a_3\omega^3 + a_5\omega^4$$
$$V_2 := a_1 + a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + a_3\omega + a_5\omega^3$$
$$V_3 := a_1 + a_2\omega^4 + a_4\omega^3 + a_3\omega^2 + a_5\omega$$
$$V_4 := a_1 + a_2\omega^3 + a_4\omega + a_3\omega^4 + a_5\omega^2 \ .$$

0,5 + 1 Montrer que $\widetilde{\sigma}(V_1) = \omega^4 V_1$. En déduire que $V_1^5, V_2^5, V_3^5, V_4^5 \in \mathbb{Q}(\omega)$.

i) Montrer que :

2

$$\cos(2\pi/11) = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 1}{10} \ .$$