Une expression de $\cos(2\pi/7)$ avec des radicaux

Soit $z := e^{2ik\pi/7}$, $k = 1, 2$ ou 3. On a :

$$z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2 + z^3 = z^{-3}\frac{z^7 - 1}{z - 1} = 0 \ .$$

En prenant la partie réelle, on trouve :

$$2\cos(2k\pi/7) + 2\cos(4k\pi/7) + 2\cos(6k\pi/7) + 1 = 0 \ .$$

Or :

$$2\cos(2x) = (2\cos x)^2 - 2$$

$$2\cos(3x) = (2\cos x)^3 - 3(2\cos x) \ .$$

Donc :

$$(2\cos(2k\pi/7))^3 + (2\cos(2k\pi/7))^2 - 2(2\cos(2k\pi/7)) - 1 = 0 \ .$$

Posons $P(X) := X^3 + X^2 - 2X - 1$.

On a :

$$P(X - \frac{1}{3}) = X^3 - \frac{7}{3}X - \frac{7}{27} \ .$$

Les racines de ce polynôme sont, d'après les formules de Cardan :

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1 + i\sqrt{27})} + \sqrt[3]{\frac{7}{2}(1 - i\sqrt{27})}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(j\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1 + i\sqrt{27})} + j^2\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1 - i\sqrt{27})}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(j^2\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1 + i\sqrt{27})} + j\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1 - i\sqrt{27})}\right)$$

où on pose $\sqrt{z} := r^{\frac{1}{3}}e^{it/3}$ si $z = re^{it}$ avec $r > 0$ et $-\pi < t < \pi$.

Or si $z = 1 + i\sqrt{27}$, $\sqrt[3]{z} = |z|e^{i\alpha}$ pour un $0 < \alpha < \pi/3$. On a donc :

$$\mathrm{Re}(\sqrt[3]{z}) > \mathrm{Re}(j^2\sqrt[3]{z}) > \mathrm{Re}(j\sqrt[3]{z}) \ .$$

Puisque $\cos(2\pi/7) > \cos(4\pi/7) > \cos(6\pi/7)$, on a :

$$2\cos(2\pi/7) + 1/3 = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1 + i\sqrt{27})} + \sqrt[3]{\frac{7}{2}(1 + i\sqrt{27})}\right)$$

$$2\cos(4\pi/7) + 1/3 = \frac{1}{3}\left(j^2\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1 + i\sqrt{27})} + j\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1 + i\sqrt{27})}\right)$$

$$2\cos(6\pi/7) + 1/3 = \frac{1}{3}\left(j\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1 + i\sqrt{27})} + j^2\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1 + i\sqrt{27})}\right) \ .$$

Bien que les 3 racines soient réelles, leur expression avec des radicaux fait intervenir des nombres complexes non réels.