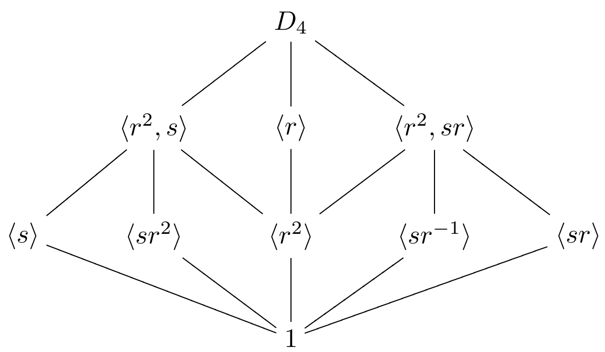
**Groupe de Galois du polynôme $X^4 - 4X^2 - 1$**

Soit $a := \sqrt{2+\sqrt{5}}$, $b := i\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

On a : $X^4 - 4X^2 - 1 = (X^2 - a^2)(X^2 - b^2)$.

Soit $D_4$ le sous-groupe de $S_4$ engendré par $r := (1234)$ et $s := (13)$. Le groupe $D_4$ est isomorphe au groupe diédral d'ordre 8.

Voici le diagramme des sous-groupes de $D_4$ :




Le corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ de $X^4 - 4X^2 - 1$ est $\mathbb{Q}(a,b)$. Son groupe de Galois est isomorphe à $D_4$.

On peut identifier $r$ à un automorphisme de $\mathbb{Q}(a,b)$ tel que $r(a) = b$, $r(b) = -a$. et $s$ à un automorphisme tel que : $s(a) = -a$ et $s(b) = b$.

Voici les corps intermédiaires de l'extension $\mathbb{Q}(a,b)/\mathbb{Q}$ associés par la correspondance de Galois :