Le groupe des automorphismes du corps $k(X)$

Soit k un corps. Soit $k(X)$ le corps des fractions rationnelles en une variable X : c'est le corps des fractions de l'anneau de polynômes $k[X]$.

Soit $f(X) = \frac{p(X)}{q(X)}$ avec $p(X), q(X)$ deux polynômes premiers entre eux. On suppose que $f(X)$ n'est pas constante.

On définit le *degré de f* : $\deg f := \max\{\deg p, \deg q\}$.

Remarque : Disons que $f(X)$ a un zéro en ∞ si la fraction rationnelle $f(\frac{1}{X})$ s'annule en 0. Si $k = \mathbb{C}$, $\deg f$ est le nombre de zéros de f comptés avec mutiplicité, et en comptant le zéro éventuel à l'infini.

En effet, si par exemple $p(X)$ et $q(X)$ sont unitaires, on a :

$$p(X) = (X - a_1)^{\alpha_1} ...(X - a_r)^{\alpha_r} \text{ et } q(X) = (X - b_1)^{\beta_1} ...(X - b_s)^{\beta_s}$$

pour certains nombres complexes a_i, b_j deux à deux distincts et certains entiers $\alpha_i, \beta_j \geq 1$. On a :

$$\deg p = \alpha_1 + ... + \alpha_r \text{ et } \deg q = \beta_1 + ... + \beta_r \ .$$

De plus,

$$f(\frac{1}{X}) = \frac{X^{\deg q}(1 - a_1X)^{\alpha_1} ...(1 - a_rX)^{\alpha_r}}{X^{\deg p}(1 - b_1X)^{\beta_1} ...(1 - b_sX)^{\beta_s}} \ .$$

Donc le nombre de zéros de f est :

$$\alpha_1 + ... + \alpha_r = \deg p$$

si $\deg p \geq \deg q$ et

$$\alpha_1 + ... + \alpha_r + \deg q - \deg p = \deg q$$

si $\deg p < \deg q$.

Lemme : Si f est une fraction non constante alors $k(X)$ est une extension finie de $k(f)$ et $[k(X) : k(f)] = \deg f$.

démo : On a $k(X) = k(f)(X)$. Soient $p(X), q(X) \in k[X]$ deux polynômes premiers entre eux tels que $f = p/q$. Si on pose :

$$P(T) := q(T)f(X) - p(T) \in k(f)[T] \, ,$$

alors $P(X) = 0$. Comme f est non constante, $P(T)$ est non nul donc X est algébrique sur $k(f)$. Soient d, e les degrés de p et q. On a : $p(T) = a_dT^d + ...$, $q(T) = b_eT^e + ...$ avec a_d, b_e non nuls. Donc le terme dominant de $P(T)$ est $-a_dT^d$ si $d > e$, $(b_df(X) - a_d)T^d$ si $d = e$ et $b_ef(X)T^d$ si $d < e$.

On a donc : $\deg P(T) = \max\{\deg p, \deg q\} = \deg f$.

Ainsi : $[k(X) : k(f)] \leq \deg f$.

Pour montrer l'égalité, il suffit de vérifier que $P(T)$ est irréductible sur $k(f)$ (ce qui entraîne que $P(T)$ est le polynôme minimal de X sur $k(f)$ (à multiplication par un élément non nul de $k(f)$ près)).

Comme f est non constante, le morphisme d'anneaux :

$$k[Y] \to k(f) \ F \mapsto F \circ f$$

est injectif. En effet, si $F = c_0 + C_1Y + ... + c_kY^k \in k[Y]$, alors :

$$F \circ f = 0 \Leftrightarrow c_0 + c_1f + ... + c_kf^k = 0$$

$$\Leftrightarrow c_0q^k + c_1q^{k-1}p + ... + c_kp^k = 0$$

$$\Rightarrow q|p$$

$$\Rightarrow f \in k[X] \ .$$

Or si f est un polynôme $F \circ f = 0 \Leftrightarrow F = 0$ (pour des raisons de degrés).

On obtient donc un morphisme injectif de corps : $k(Y) \to k(f)$ $F \mapsto F \circ f$.

Ce morphisme est un isomorphisme. Il suffit donc de montrer que le polynôme :

$$q(T)Y - p(T)$$

est irréductible sur le corps $k(Y)$.

Or le polynôme $q(T)Y - p(T)$ est de degré 1 en Y. Donc il est irréductible dans $k[Y,T] = k[Y][T]$ (comme $q(T), p(T)$ sont premiers entre eux, il n'existe pas de polynôme non constant en T qui le divise). Par conséquent, $q(T)Y - p(T)$ est irréductible sur $k(Y)$ (car $k[Y]$ est principal et ce n'est pas un polynôme constant en T).

Soit $\phi : k(X) \to k(X)$ un automorphisme qui laisse fixe les constantes.

On a :$k(\phi(X)) = k(X)$. Donc la fraction rationnelle $\phi(X)$ est non constante et d'après le lemme son degré est $1 = [k(X) : k(\phi(X))]$.

Donc $\phi(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$ pour certains $a, b, c, d \in k$. Comme $\phi(X)$ est non constante, les couples (a, b), (c, d) ne sont pas proportionnels *i.e.* $ad - bc \neq 0$.

Réciproquement, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

est une matrice inversible à coefficients dans k, le changement de variables $X \mapsto \frac{aX+b}{cX+d}$ induit un morphisme de corps :

$$\phi_A : k(X) \to k(X) \;\; f(X) \mapsto f\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right)$$

qui est un isomorphisme. En effet, l'image est le corps engendré par $\frac{aX+b}{cX+d}$ et $[k(X) : k\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right)] = 1$.

On remarque que si A, B sont des matrices inversibles, alors :

$$\phi_{AB} = \phi_B \circ \phi_A \ .$$

De plus, $\phi_A = \mathrm{Id} \Leftrightarrow (aX + b)/(cX + d) = X \Leftrightarrow aX + b = cX^2 + dX \Leftrightarrow b = c = 0$ et $a = d$.

On a donc un morphisme surjectif de groupes :

$$\mathrm{GL}_2(k) \to \mathrm{Aut}_k(k(X)) \;\; A \mapsto \phi_{A^{-1}}$$

de noyau les matrices diagonales inversibles. Donc :

$$\mathrm{PGL}_2(k) \simeq \mathrm{Aut}_k(k(X)) \ .$$