Calcul de cos(2π/17)

Soit G un groupe cyclique d'ordre n. Soit H un sous-groupe d'ordre d. Alors $d|n$. Le groupe G/H est d'ordre n/d. Donc si g est un générateur de G, $g^{n/d} \in H$. Or, $g^{n/d}$ est d'ordre d donc $H = \langle g^{n/d} \rangle$. Donc pour tout d qui divise n, il existe un seul sous-groupe de G d'ordre d.

Soit p premier. Le groupe $G := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique d'ordre $p-1$. Si $f|p-1$, on note H_f le sous-groupe de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ d'ordre f.

Si $f|p-1$, alors on pose pour tout entier l :

$$\zeta_{f,l} := \sum_{h \in H_f} \zeta^{lh} \quad .$$

On a :

$$\zeta_{f,l} \in \mathbb{Q}(\zeta)^{H_f} \quad .$$

Soient $l_1, ..., l_e$ un système de représentants de G/H_f. L'orbite de ζ_{f,l_1} pour l'action de G est formée des ζ_{f,l_i}. Les ζ_{f,l_i} sont deux à deux distincts car $\zeta, ..., \zeta^{p-1}$ sont indépendants (en effet, $\Phi_p(X) = 1 + ... + X^{p-1}$ est le polynôme minimal de ζ). Le polynôme :

$$(X - \zeta_{f,l_1})...(X - \zeta_{f,l_e})$$

a ses coefficients dans $\mathbb{Q}$ et c'est le polynôme minimal de ζ_{f,l_i} sur $\mathbb{Q}$ pour tout i.

Comme $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\zeta)^{H_f}] = f$, on a aussi :

$$[\mathbb{Q}(\zeta)^{H_f} : \mathbb{Q}] = e$$

donc : $\mathbb{Q}(\zeta)^{H_f} = \mathbb{Q}(\zeta_{f,l_i})$ pour tout i.

On a :

$$\zeta_{f,l}\zeta_{f,m} = \sum_{h,h' \in H_f} \zeta^{lh+mh'}$$

$$= \sum_{h' \in H_f} \sum_{h \in H_f} \zeta^{lh+mh'}$$

$$= \sum_{h' \in H_f} \sum_{h'' \in H_f} \zeta^{lh'h''+mh'}$$

car pour tout $h' \in H_f$, $h'H_f = H_f$.

Donc :

$$\zeta_{f,l}\zeta_{f,m} = \sum_{h',h'' \in H_f} (\zeta^{lh''+m})^{h'}$$

$$= \sum_{h'' \in H_f} \zeta_{f,lh"+m} \quad .$$

Applications : On a : $\langle 3 \rangle = (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times$.

Si $f = 8$, $H_f = \langle 3^2 \rangle = \{-8, -4, -2, -1, 8, 4, 2, 1\}$ (on prend ces valeurs modulo 17).

On a donc :

$$(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times = H_8 \cup 3H_8$$

et :

$$\zeta_{8,1} = \sum_{a \in H_8} \zeta^a$$

$$= \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^2 + \zeta^{-2} + \zeta^{-4} + \zeta^4 + \zeta^8 + \zeta^{-8}$$

$$\zeta_{8,3} = \sum_{a \in 3H_8} \zeta^a$$

$$= \zeta^3 + \zeta^{-3} + \zeta^6 + \zeta^{-6} + \zeta^{-5} + \zeta^5 + \zeta^7 + \zeta^{-7}$$

en particulier :

$$\zeta_{8,1} + \zeta_{8,3} = \sum_{a \in \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}} \zeta^a - 1 = -1 \ .$$

On a aussi :

$$\zeta_{8,1}\zeta_{8,3} = \sum_{h \in H_8} \zeta_{8,h+3}$$

$$= \zeta_{8,2} + \zeta_{8,4} + \zeta_{8,1} + \zeta_{8,5} + \zeta_{8,-1} + \zeta_{8,7} + \zeta_{8,-6} + \zeta_{8,-5}$$

or, $\zeta_{8,2} = \zeta_{8,4} = \zeta_{8,1} = \zeta_{8,-1}$ et $\zeta_{8,5} = \zeta_{8,-5} = \zeta_{8,7} = \zeta_{8,6} = \zeta_{8,3}$.

Donc : $\zeta_{8,1}\zeta_{8,3} = -4$; et $\zeta_{8,1}, \zeta_{8,3}$ sont les racines de :

$$X^2 + X - 4 \ .$$

D'où : $\zeta_{8,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Or, $\zeta_{8,1} = 2\cos(2\pi/17) + 2\cos(4\pi/17) + 2\cos(8\pi/17) + 2\cos(16\pi/17) > 2\cos(16\pi/17) > -2$.

Comme $\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < -2$, on a forcément :

$$\zeta_{8,1} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \ .$$

De même on trouve les valeurs :

$$\zeta_{4,1}, \zeta_{4,2}, \zeta_{4,3}, \zeta_{2,1}, \zeta_{2,3}$$

avec $\cos(2\pi/17) = 1/2 \ \zeta_{2,1}$.