Université Lyon I - M1 - Théorie de Galois

Corrigé du partiel du mardi 3 avril 2012 (1)

1 -

Soit $Q(X) = 1 + X + \dots + X^{p-1}$.

Le polynôme $Q(X+1) = \binom{p}{1} + \binom{p}{2}X + \dots + X^{p-1}$ vérifie le critère d'Eisenstein.

Donc $Q(X+1)$ et $Q(X)$ sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$

2 -

a) Comme $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$,

$\mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{Q}(\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4)$ est le corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ du polynôme (irréductible) $1 + X + X^2 + X^3 + X^4$.

Donc $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne de groupe de Galois isomorphe à $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ via :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times & \longrightarrow & Gal(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}) \\ a & \longmapsto & (\sigma_a : \omega \mapsto \omega^a) \end{array}$$

Comme 5 est premier, le groupe $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

b) Comme $\omega + \omega^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{5} \in \mathbb{R}$,

$\mathbb{Q}(\omega + \frac{1}{\omega}) \subset \mathbb{Q}(\omega) \cap \mathbb{R}$.

Si $x \in \mathbb{Q}(\omega) \cap \mathbb{R}$, alors

$x = a + b\omega + c\omega^2 + d\omega^3$ pour certains $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ car ω est de degré 4 sur $\mathbb{Q}$.

on a : $x = Re(x) = a + b\, Re\,\omega + c\, Re(\omega^2) + d\, Re(\omega^3)$

Or $Re\,\omega = \frac{1}{2}(\omega + \omega^{-1})$ $\quad Re(\omega^2) = \frac{1}{2}(\omega^2 + \omega^{-2}) = \frac{1}{2}(\omega + \omega^{-1})^2 - 1$

et $\mathrm{Re}\, \omega^3 = \frac{1}{2}(\omega^3+\omega^{-3}) = \frac{1}{2}\left((\omega+\omega^{-1})^3 - 3(\omega+\omega^{-1})\right)$

D'où $x \in \mathbb{Q}(\omega+\omega^{-1})$.

c) On a :

$$1+\omega+\omega^{-1}+\omega^2+\omega^{-2} = 0$$

d'où $(\omega+\omega^{-1})^2 + (\omega+\omega^{-1}) - 1 = 0$

Or les racines de X^2+X-1 sont :

$$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Comme $\omega+\omega^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{5} > 0$,

$$\omega+\omega^{-1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Soit $\delta := \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

On a : $\omega+\omega^{-1} = \delta \Leftrightarrow \omega^2 - \delta\omega + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{\delta \pm i\sqrt{4-\delta^2}}{2}$$

Or $4-\delta^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

Comme $\sin\frac{2\pi}{5} = \mathrm{Im}(\omega) > 0$, on a :

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

③

remarque : on en déduit : $\left(\omega-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)\right)^2=\frac{-(5+\sqrt{5})}{8}$

et donc $[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}(\sqrt{5})]=2$

3 - a) Le polynôme minimal de $z=e^{2i\pi/11}$ sur $\mathbb{Q}$ est :

$$\Phi_{11}(X)=1+X+\cdots+X^{10}.$$

Les racines de $\Phi_{11}(X)$ sont les $e^{2ik\pi/11}$ $k\in(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$.

Il existe donc un plongement

$$\sigma:\ \mathbb{Q}(z)\to\mathbb{C}$$
$$z\mapsto e^{4i\pi/11}=z^2$$

Comme $\sigma(\mathbb{Q}(z))=\mathbb{Q}(z^2)\subset\mathbb{Q}(z)$, on a :

$\sigma\in Gal(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})$.

De plus $\sigma^m=Id\iff\sigma^m(z)=z$

$\iff z^{2^m}=z$

$\iff z^{2^m-1}=1\iff 2^m=1\bmod 11\iff m=0\bmod 10$

(en effet, 2 est d'ordre 10 dans $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$. Puisque $|Gal(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})|=[\mathbb{Q}(z):\mathbb{Q}]=10$,

On a bien $\langle\sigma\rangle=Gal(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})$.

b) Si $k\in\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, $a_k=z^k+z^{-k}$.

Donc $\sigma(a_k)=z^{2k}+z^{-2k}$
$=a_{2k}$

Ainsi : $\sigma(a_1)=a_2$, $\sigma(a_2)=a_4$, $\sigma(a_4)=a_8=a_{-3}=a_3$, $\sigma(a_3)=a_6=a_{-5}=a_5$
(car $a_{-k}=a_k$) ; $\sigma(a_5)=a_{10}=a_{-1}=a_1$.

b) Les a_k sont des polynômes en

$$a_1 = 2\cos\frac{2\pi}{11} = z + z^{-1}$$

Donc $\mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \mathbb{Q}(z+z^{-1})$.

c)

L'extension $\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}$ est galoisienne de groupe de Galois isomorphe au groupe cyclique $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^{\times}$.
L'extension $\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}(z+z^{-1})$ est de degré 2.
Comme $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})$ est abélien,

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}(z+z^{-1})) \lhd \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}).$$

Donc l'extension $\mathbb{Q}(z+z^{-1})/\mathbb{Q}$ est galoisienne de groupe de Galois :

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}) \Big/ \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}(z+z^{-1}))$$

Ce groupe est cyclique (comme quotient d'un groupe cyclique) d'ordre $\frac{10}{2} = 5$.

d) Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des entiers ≥ 1 tels que :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11}, \omega) \arrow[r, dash, "\beta"] \arrow[d, dash, "\alpha"] & \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11}, \sqrt{5}) \arrow[d, dash, "\gamma"] \arrow[r, dash, "\delta"] & \mathbb{Q}(\cos 2\pi/11) \arrow[d, dash, "5"] \\
\mathbb{Q}(\omega) \arrow[r, dash, "2"] & \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \arrow[r, dash, "2"] & \mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

Par multiplicativité des degrés, on a : 5

$$5\delta = 2\gamma$$

Donc $2 | \delta$ et $5 | \gamma$

Or $\gamma \leq 5$ car $\cos\frac{2\pi}{11}$ est de degré ≤ 5 sur $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

et $\delta \leq 2$ car $\sqrt{5}$ est de degré ≤ 2 sur $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11})$

Donc $\delta = 2$ et $\gamma = 5$.

Ensuite, on a : $\beta\gamma = 2\alpha$

$$\Leftrightarrow 5\beta = 2\alpha$$

$$\Rightarrow 5 | \alpha \text{ et } 2 | \beta$$

Comme $\cos\frac{2\pi}{11}$ est de degré ≤ 5 sur $\mathbb{Q}(\omega)$,

on a : $\alpha \leq 5$; d'où $\alpha = 5$ et $\beta = 2$.

c) Comme $[\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11}, \omega) : \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11})] = 4$,

le polynôme $1 + X + X^2 + X^3 + X^4$ est le polynôme minimal de ω sur $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11})$.

Ses racines sont $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$.

Il existe donc un $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11})$-plongement

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\cos\tfrac{2\pi}{11}, \omega) &\xrightarrow{\eta} \mathbb{C} \\ \omega &\longmapsto \omega^2 \end{aligned}$$

Forcément, $\eta\left(\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11}, \omega)\right) \subset \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11}, \omega^2) = \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11}, \omega))$

On peut aussi prolonger σ à $\mathbb{Q}(\cos 2\pi/11, \omega)$ en $\tilde\sigma$

posant $\tilde\sigma\left(\sum_i \alpha_i \omega^i\right) := \sum_i \sigma(\alpha_i)\,\omega^i$

pour tout polynôme $\sum_i \alpha_i X^i \in \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11})[X]$.

f) On a :

x	$\tilde\sigma(x)$	$\eta(x)$	$\tilde\sigma\eta(x)$	$\eta\tilde\sigma(x)$
ω	ω	ω^2	ω^2	ω^2
a_1	a_2	a_1	a_2	a_2
a_2	a_4	a_2	a_4	a_4
a_4	a_3	a_4	a_3	a_3
a_3	a_5	a_3	a_5	a_5
a_5	a_1	a_5	a_1	a_1

On a donc $\tilde\sigma\eta = \eta\tilde\sigma$ sur $K = \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11}, \omega)$

Comme $\tilde\sigma$ est d'ordre 5 et η d'ordre 4,

$\tilde\sigma\eta$ est d'ordre $20 = \text{ppcm}(5,4)$.

(L'ordre de $\tilde\sigma$ est 5 car $\tilde\sigma^5 = Id$ et $\tilde\sigma \neq Id$
L'ordre de η est 4 car $\eta^4 = Id$ et $\eta^2 \neq Id$)

g) D'où le tableau :

G	$\lvert G\rvert$	K^G
$\langle\tilde\sigma\eta\rangle$	20	$\mathbb{Q}$
$\langle\tilde\sigma\eta^2\rangle$	10	$\mathbb{Q}(\sqrt5)$
$\langle\tilde\sigma\rangle$	5	$\mathbb{Q}(\omega)$
$\langle\eta\rangle$	4	$\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11})$
$\langle\eta^2\rangle$	2	$\mathbb{Q}(\sqrt5, \cos\frac{2\pi}{11})$
$\{1\}$	1	K

En effet, $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11}) \subset K^{\langle\eta\rangle}$

et comme $[K : K^{\langle\eta\rangle}] = \lvert\langle\eta\rangle\rvert = 4 = [K : \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11})]$

on a : $K^{\langle\eta\rangle} = \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11})$.

De même : $\mathbb{Q}(\omega) \subset K^{\langle\tilde\sigma\rangle}$

et $[K : K^{\langle\tilde\sigma\rangle}] = [K : \mathbb{Q}(\omega)] = \lvert\langle\tilde\sigma\rangle\rvert = 5$.

De plus, $\eta(\omega) = \omega^2$

$$\Rightarrow \eta(\omega+\omega^{-1}) = \omega^2+\omega^{-2} = (\omega+\omega^{-1})^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow \eta\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right) = \frac{3-\sqrt5}{2} - 2$$

$$\Leftrightarrow \eta\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right) = \frac{-1-\sqrt5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta(\sqrt5) = -\sqrt5.$$

Donc $K^{\langle\eta^2\rangle} \supset \mathbb{Q}(\sqrt5, \cos\frac{2\pi}{11})$

et pour des raisons de degrés : $K^{\langle\eta^2\rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt5, \cos\frac{2\pi}{11})$

On a aussi : $\tilde\sigma\eta^2(\sqrt5) = \sqrt5 \Rightarrow K^{\langle\tilde\sigma\eta^2\rangle} \supset \mathbb{Q}(\sqrt5)$

$K^{\langle\tilde\sigma\eta^2\rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt5)$ car $\tilde\sigma\eta^2$ est d'ordre 10.

(8)

h) $\tilde{\sigma}(V_1)$

$= a_2 + a_4\omega + a_3\omega^2 + a_5\omega^3 + a_1\omega^4$

$= \omega^4(a_1 + a_2\omega + a_4\omega^2 + a_3\omega^3 + a_5\omega^4)$

$= \omega^4 V_1$

Comme $V_2 = \eta(V_1)$, $V_3 = \eta(V_2)$, $V_4 = \eta(V_3)$ et

comme $\tilde{\sigma}\eta = \eta\tilde{\sigma}$, on a aussi :

$\tilde{\sigma}(V_2) = \tilde{\sigma}\eta(V_1) = \eta(\tilde{\sigma}(V_1)) = \omega^3 V_2$

$\tilde{\sigma}(V_3) = \omega V_3$

$\tilde{\sigma}(V_4) = \omega^2 V_4$.

Donc : $\tilde{\sigma}(V_i^5) = (\omega^{\alpha_i})^5 V_i^5$ (où $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2$)

$= V_i^5$

et $V_i^5 \in K^{\langle\tilde{\sigma}\rangle} = \mathbb{Q}(\omega)$.

i) $\cos\frac{2\pi}{11} = \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{2\pi}{11}\right) = \frac{a_1}{2}$

Or $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 1 = 5a_1$

car $-1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

(en effet, $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} = 0$

$\Leftrightarrow 1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$

$\Leftrightarrow -1 = a_1 + a_2 + a_4 + a_3 + a_5$)

Donc $\cos\frac{2\pi}{11} = \dfrac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 1}{10}$

Conclusion :

En utilisant des formules trigonométriques communes comme :

$$2\cos x \, 2\cos y = 2\cos(x+y) + 2\cos(x-y) \qquad (\forall x,y)$$

on obtient des relations :

$$a_1^2 = a_2 + 2$$

$$a_1 a_2 = a_3 + a_1$$

et plus généralement :

$a_i a_j$ comme une combinaison linéaire

à deux termes, à coefficients entiers, de $1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

On peut donc calculer ainsi explicitement :

$V_1^2, V_1^3, V_1^4, V_1^5$.

On trouve :

$$V_1^5 = -196 - 130\omega + 255\omega^2 - 20\omega^3 + 90\omega^4$$

En appliquant τ, on trouve successivement :

$$V_2^5 = -196 - 20\omega - 130\omega^2 + 90\omega^3 + 255\omega^4$$

$$V_3^5 = -196 + 90\omega - 20\omega^2 + 255\omega^3 - 130\omega^4$$

$$V_4^5 = -196 + 255\omega + 90\omega^2 - 130\omega^3 - 20\omega^4$$

On en déduit grâce à 2c) :

$$V_1^5 = -\frac{11}{4}\left(89 + 25\sqrt{5}\right) - \frac{11}{4}\left(20\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 25\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right) i$$

$$V_2^{\,5} = -\frac{11}{4}\left(89-25\sqrt{5}\right) - \frac{11}{4}\left(25\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 20\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)i$$

$$V_3^{\,5} = -\frac{11}{4}\left(89+25\sqrt{5}\right) + \frac{11}{4}\left(20\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 25\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)i$$

$$V_4^{\,5} = -\frac{11}{4}\left(89-25\sqrt{5}\right) + \frac{11}{4}\left(25\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 20\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)i$$

et $\cos\frac{2\pi}{11} = \frac{1}{10}\left(\sqrt[5]{V_1^{\,5}} + \sqrt[5]{V_2^{\,5}} + \sqrt[5]{V_3^{\,5}} + \sqrt[5]{V_4^{\,5}} - 1\right)$

en choisissant bien les racines cinquièmes.

<u>remarque</u>: On peut vérifier.

$$V_1 V_3 = V_2 V_4 = 11$$