## TD I

**Exercice 1 (Méthode de Cardan (1501-1576) / Tartaglia (1500-1557))**
*Soient $p, q \in \mathbb{R}$.*

*On va résoudre :*

$$(E) \quad z^3 + pz + q = 0 \ .$$

*— Vérifier que toute équation cubique se ramène à une équation de cette forme.*

*a) Soient $z_1, z_2, z_3$ les 3 racines de $(E)$ (au sens où : $z^3 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$). Exprimer le discriminant $\Delta := (z_1 - z_2)^2 (z_2 - z_3)^2 (z_1 - z_3)^2$ en fonction de $p$ et $q$.*

*b) Montrer que :*

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^3 + pz + q \text{ a une racine réelle double}$$

$$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^3 + pz + q \text{ a 3 racines réelles simples}$$

$$\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^3 + pz + q \text{ a 2 racines complexes conjuguées et 1 racine réelle}$$

*c) Soient $u, v$ tels que :*

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases} .$$

*Montrer que $z = u + v$ est une racine de $z^3 + pz + q$.*

*d) Montrer que les trois racines de l'équation*

$$z^3 + pz + q = 0$$

*sont données par les formules de Cardan :*

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)}$$

$$z_2 = j\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)} + j^2\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)}$$

$$z_3 = j^2\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)} + j\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)}$$

*(où si $x$ est réel, $\sqrt[3]{x}$ est la racine cubique réelle et si $z = re^{it}$ avec $r > 0$, $-\pi < t < \pi$, $\sqrt[3]{z} := r^{1/3} e^{it/3}$).*

*e) Trouver une expression de $\cos(2\pi/7)$ avec des radicaux.*

**Exercice 2**

a) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}$.

b) En déduire le degré de la $\mathbb{Q}$-extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

c) Soit $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha)$.

d) Déterminer le polynôme minimal $P$ de $\alpha$ sur $\mathbb{Q}$ et toutes les racines de $P$.

e) Déterminer les automorphismes de $\mathbb{Q}(\alpha)$.

f) Soit $K$ un sous-corps de $\mathbb{Q}(\alpha)$ ; en remarquant que le polynôme minimal de $\alpha$ sur $K$ divise $P$ dans $K[X]$, montrer que

$$K = \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{3}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{6}) \text{ ou } \mathbb{Q}(\alpha).$$

**Exercice 3 Irréductibilité du polynôme $X^n - X - 1$**

*Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on notera, chaque fois que cela a un sens :*

$$\mathscr{S}(P) := \sum_{z \text{ racine de P}} (z - \frac{1}{z}) \ .$$

*Notons $F := X^n - X - 1$.*

a) *Montrer que $F$ a $n$ racines distinctes et calculer $\mathscr{S}(F)$.*
*Soit maintenant $D \in \mathbb{Q}[X]$ est un diviseur unitaire de $F$.*

b) *Montrer que $D \in \mathbb{Z}[X]$.*

c) *Montrer que $\mathscr{S}(D)$ a un sens et que c'est un entier.*

d) *Soit $z = re^{it}$ ($r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$) une racine de $D$. Montrer que :*

$$r^{2n} = r^2 + 1 + 2r\cos t$$

*et en déduire que $r \neq 1$.*

e) *Montrer que $2Re(z - \frac{1}{z}) > \frac{1}{r^2} - 1$.*

f) *Soient $z_1, ..., z_d$ les racines de $D$. Calculer $\prod_{i=1}^{d} |z_i|$.*

g) *Montrer que $\mathscr{S}(D) \geq 1$.*

h) *Conclusion ?*

**Exercice 4** *Soit $k \subseteq K$ une extension de corps.*

a) *Soit $x \in K$. Montrer que sont équivalentes :*
*i) il existe un polynôme non nul à coefficients dans $k$ qui annule $x$ ;*
*ii) le $k-$espace vectoriel $k[x]$ est de dimension finie sur $k$ ;*
*iii) La $k-$algèbre $k[x]$ est un corps.*
*On dit alors que $x$ est algébrique sur $k$.*

b) *En déduire que si $x, y \in K$ sont algébriques sur $k$, alors $x \pm y$, $xy$ et $x/y$ (si $y \neq 0$) sont algébriques sur $K$.*
*En revanche d'après le théorème de Gelfond-Schneider, si $x, y \in \mathbb{C}$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$, si $x \neq 0, 1$ et si $y$ est irrationnel, alors $x^y$ est transcendant sur $\mathbb{Q}$.*

c) *Soient $K := \mathbb{Q}(t), K_1 := \mathbb{Q}(t^2), K_2 := \mathbb{Q}(t^2 - t)$.*
*Montrer que $K$ est algébrique sur $K_1$, algébrique sur $K_2$ mais non sur $K_1 \cap K_2$. Indication : vérifier que $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Q}$.*

**Exercice 5** *Soient $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3$ trois corps. Montrer que :*

$$[K_3 : K_1] = [K_3 : K_2][K_2 : K_1] \ .$$