TD II

Exercice 1

Déterminer les automorphismes du corps $\mathbb{Q}$.

Déterminer les automorphismes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Déterminer le groupe des automorphismes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. *Pour chaque sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ *déterminer le corps des invariants.*

Déterminer les automorphismes du corps $\mathbb{R}$. *Indication : Montrer d'abord qu'un tel automorphisme est croissant puis qu'il est continu.*

Déterminer les automorphismes continus du corps $\mathbb{C}$.

Déterminer les automorphismes de $\mathbb{Q}_p$ *(si on connaît les corps* $p-$*adiques). Indication : vérifier cette caractérisation des unités de l'anneau* $\mathbb{Z}_p$ *: si* $x \in \mathbb{Q}_p$, *alors* $x \in \mathbb{Z}_p^\times \Leftrightarrow x^{p-1}$ *a une racine* $n-$*ième dans* $\mathbb{Q}_p$ *pour une infinités d'entiers* $n > 0$ *; en déduire qu'un automorphisme de* $\mathbb{Q}_p$ *est forcément continu.*

Déterminer les morphismes de $\mathbb{Q}(i)$ *dans* $\mathbb{C}$. *Déterminer les morphismes de* $\mathbb{Q}(j)$ *dans* $\mathbb{C}$. *Les corps* $\mathbb{Q}(i)$ *et* $\mathbb{Q}(j)$ *sont-ils isomorphes ?*

Déterminer tous les morphismes de corps $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{C}$.

Soient p *un nombre premier et* $q := p^n$ *une puissance de* p. *Vérifier que* $F : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ *est un automorphisme de corps et que* $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$ *est un groupe cyclique d'ordre* n *engendré par* F.

Montrer que l'identité est le seul automorphisme du corps $\mathbb{F}_p(t^{\frac{1}{p}})$ *qui laisse fixe les éléments de* $\mathbb{F}_p(t)$.

Montrer que $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(t)) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. *Indication : montrer que si* $\frac{p}{q} \in \mathbb{C}(t)$, *alors* $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(\frac{p}{q})] = \max\{\deg p, \deg q\}$.

Exercice 2 *a) Déterminer les extensions algébriques de* $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'extension $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ *n'est pas finie.*

c) On pose : $R := \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$. *Montrer que* $\overline{\mathbb{Q}} = R(i)$.

Remarque : le théorème d'Artin-Schreier affirme que si K/k *est une extension finie et si* K *est algébriquement clos, alors* k *est de caractéristique* 0, $[K : k] = 2$ *et il existe* $i \in K$ *tel que* $i^2 = -1$ *et* $K = k(i)$.

Exercice 3

a) Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5})/\mathbb{Q}$.

b) Déterminer les plongements de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5})$ dans $\mathbb{C}$.

c) Trouver un élément primitif pour l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5})/\mathbb{Q}$.

Exercice 4 Soit $\alpha := \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

a) Déterminer $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$.

b) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\alpha)) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 5 Soit $K \subseteq L$ une extension algébrique. On suppose que $L = K(x, y)$ avec $x, y \in L$ et y séparable sur K.

a) On suppose K infini. On note $x := x_1, x_2, ..., x_p$, $y := y_1, ..., y_q$ les racines de P_x et P_y les polynômes minimaux de x et y sur K (dans une clôture algébrique de L). Montrer qu'il existe $t \in K$ tel que les $x_i + ty_j$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, soient deux à deux distincts.

b) On pose $z := x + ty$. Quel est le pgcd des polynômes $P_x(z - tX)$ et $P_y(X)$.

c) Montrer que $L = K(z)$.

Exercice 6 Soit L/K une extension algébrique.

On suppose qu'il existe x tel que $L = K(x)$. Soit P le polynôme minimal de x sur K.

a. Soit M un sous-corps de L, contenant K. Montrer qu'il existe un facteur unitaire Q de P dans $L[X]$ tel que M soit engendré sur K par les coefficients de Q.

b. En déduire que l'extension L/K n'a qu'un nombre fini de sous-extensions.

Réciproquement, on suppose que l'extension L/K n'a qu'un nombre fini de sous-extensions.

a. Montrer que $[L : K]$ est fini.

b. Si K est fini, prouver qu'il existe x avec $L = K(x)$.

c. Si K est infini, montrer que pour tout x, y dans L, il existe $\lambda \in K$ tel que $K(x, y) = K(x + \lambda y)$. En déduire qu'il existe x tel que $L = K(x)$.

Exercice 7 (Séparabilité) Soit $f \in k[X]$ un polynôme. Montrer que f a toutes ses racines simples (dans une extension algébriquement close de k) si et seulement si f et f' sont premiers entre eux.

Exercice 8 Soit p un nombre premier, $L = \mathbb{F}_p(X, Y)$ le corps des fractions rationnelles à deux variables. On pose $K = \mathbb{F}_p(X^p, Y^p) \subset L$.

a) Montrer que $[L : K] = p^2$, et que pour tout x dans L, $x^p \in K$.

b) En déduire qu'il n'existe pas de $x \in L$ tel que $L = K(x)$.

c) Montrer directement qu'il existe une infinité de corps entre K et L.