TD III

Exercice 1
a) Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5})/\mathbb{Q}$.
b) Déterminer les plongements de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5})$ dans $\mathbb{C}$.
c) Trouver un élément primitif pour l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5})/\mathbb{Q}$.

Exercice 2 Soit $\alpha := \sqrt{2+\sqrt{2}}$.
a) Déterminer $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$.
b) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\alpha)) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 3 Soit $K \subseteq L$ une extension algébrique. On suppose que $L = K(x,y)$ avec $x, y \in L$ et y séparable sur K.
a) On suppose K infini. On note $x := x_1, x_2, ..., x_p$, $y := y_1, ..., y_q$ les racines de P_x et P_y les polynômes minimaux de x et y sur K (dans une clôture algébrique de L). Montrer qu'il existe $t \in K$ tel que les $x_i + ty_j$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, soient deux à deux distincts.
b) On pose $z := x+ty$. Quel est le pgcd des polynômes $P_x(z-tX)$ et $P_y(X)$?
c) Montrer que $L = K(z)$.

Exercice 4 Soit L/K une extension algébrique.
On suppose qu'il existe x tel que $L = K(x)$. Soit P le polynôme minimal de x sur K.

a. Soit M un sous-corps de L, contenant K. Montrer qu'il existe un facteur unitaire Q de P dans $L[X]$ tel que M soit engendré sur K par les coefficients de Q.
b. En déduire que l'extension L/K n'a qu'un nombre fini de sous-extensions.

Réciproquement, on suppose que l'extension L/K n'a qu'un nombre fini de sous-extensions.

a. Montrer que $[L : K]$ est fini.
b. Si K est fini, prouver qu'il existe x avec $L = K(x)$.
c. Si K est infini, montrer que pour tout x, y dans L, il existe $\lambda \in K$ tel que $K(x,y) = K(x+\lambda y)$. En déduire qu'il existe x tel que $L = K(x)$.

Exercice 5 *Déterminer le corps de décomposition du polynôme $X^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$ et déterminer son groupe de Galois G. Décrire les sous-groupes de G et les extensions de $\mathbb{Q}$ correspondantes.*

Exercice 6 *Soit G le sous-groupe des automorphismes de $\mathbb{C}(t)$ engendré par :*

$$t \mapsto \zeta t \text{ et } t \mapsto t^{-1}$$

où ζ est une racine primitive $n-$ième de 1.
a) Montrer que G est isomorphe au groupe diédral d'ordre $2n$.
b) Montrer que $\mathbb{C}(t)^G = \mathbb{C}(t^n + t^{-n})$.

Exercice 7 *a) Soit G le sous-groupe des automorphismes de $\mathbb{C}(t)$ engendré par les changements de variables $t \mapsto t^{-1}$ et $t \mapsto 1-t$. Montrer que G laisse stable l'ensemble des 3 fonctions :*

$$f_1 := t + t^{-1},\ f_2 := 1 - t + (1-t)^{-1},\ f_3 := 1 - t^{-1} + (1-t^{-1})^{-1}\ .$$

En déduire que G est isomorphe au groupe S_3.

b) Soit K le sous-corps des fractions rationnelles $f \in \mathbb{C}(t)$ invariantes par les changements de variables

$$t \mapsto 1-t \text{ et } t \mapsto t^{-1}\ .$$

Montrer que $K = \mathbb{C}\left(\frac{(t^2-t+1)^3}{t^2(t-1)^2}\right)$.

c) En déduire que l'extension :

$$\mathbb{C}\left(\frac{(t^2-t+1)^3}{t^2(t-1)^2}\right) \subset \mathbb{C}(t)$$

est galoisienne de groupe de Galois S_3.