TD IV

Exercice 1 Soit p un nombre premier.

a) Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ qui contient une racine $p-$ème de l'unité, $z_p \neq 1$. Soit $a \in K$ qui n'est pas une puissance $p-$ème.
Montrer que l'extension $L = K(\sqrt[p]{a})$ est de degré p et galoisienne de groupe de Galois cyclique.

b) Montrer que réciproquement, si une extension galoisienne L/K est de degré p, si $L \subseteq \mathbb{C}$ et si K contient une racine $p$ème de l'unité, $z_p \neq 1$, alors il existe $a \in K$ tel que $L = K(\sqrt[p]{a})$ *(indication : considérer une valeur propre d'un générateur σ du groupe de Galois).*

c) Appliquer le b) au corps de décomposition de $X^3 - 3X + 1$ sur $\mathbb{Q}(j)$.

d) Montrer que le corps de décomposition L de $X^3 - 3X + 1$ sur $\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne cyclique de degré 3. Existe-t-il $a \in \mathbb{Q}$ tel que $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{a})$?

Exercice 2 Soit le polynôme $f(X) := X^p - X - t$.

a) Montrer que si α est une racine de f, alors $\alpha + i$ aussi ($i \in \mathbb{Z}$).

b) Montrer que $f(X)$ est irréductible sur $\mathbb{F}_p(t)$.

c) Montrer que le groupe de Galois de $f(X)$ sur $\mathbb{F}_p(t)$ est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 3 Soit k un corps de caractéristique p. Soit F une extension galoisienne cyclique de degré p de k. Soit σ un générateur du groupe de Galois de F sur k.

a) Montrer que l'endomorphisme $k-$linéaire de F :

$$S : \alpha \mapsto \alpha - \sigma(\alpha)$$

est nilpotent.

b) Soit $\alpha \in \ker S^2 \setminus \ker S$. Montrer que $\beta := \frac{\alpha}{\sigma(\alpha)-\alpha}$ vérifie $\sigma(\beta) = \beta + 1$.

c) En déduire que β vérifie une équation de la forme $X^p - X - a = 0$.

Exercice 4 *Soient trois corps : $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3$. On suppose que K_3/K_1 est galoisienne finie. Montrer que si $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_3/K_1)$, alors :*

$$\sigma \mathrm{Gal}(K_3/K_2)\sigma^{-1} = \mathrm{Gal}(K_3/\sigma(K_2)) \ .$$

Exercice 5 *Le groupe S_n agit sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{C}(X_1, ..;, X_n)$ par permutations des coordonnées. On note $\sigma_1 := X_1 + ... + X_n, ..., \sigma_n = X_1...X_n$ les fonctions symétriques élémentaires.*

a) Montrer que $\mathbb{C}(X_1, ..., X_n)^{S_n} = \mathbb{C}(\sigma_1, ..., \sigma_n)$.

b) On pose $\Delta := \prod_{1 \leq i < j \leq n}(X_i - X_j)$. Montrer que $\mathbb{C}(X_1, ..., X_n)^{A_n} = \mathbb{C}(\sigma_1, ..., \sigma_n, \Delta)$.

c) On pose $Y_k := X_1 + j^k X_2 + j^{2k} X_3 \in \mathbb{C}(X_1, X_2, X_3)$ pour $k = 1, 2, 3$. Montrer que :

$$\mathbb{C}(X_1, X_2, X_3)^{A_3} = \mathbb{C}\left(\frac{Y_1^2}{Y_2}, \frac{Y_2^2}{Y_1}, Y_3\right)$$

(indication : $Y_1^3 = (Y_1^2/Y_2)^2 \; Y_2^2/Y_1$ et $\mathbb{C}(X_1, X_2, X_3) = \mathbb{C}(Y_1^2/Y_2, Y_2^2/Y_1, Y_3, Y_1)$).