V.— Groupes de Galois des cubiques et des quartiques

Exercice 1 a) Soit k un corps de caractéristique $\neq 2,3$. Soit $f(X)$ un polynôme irréductible sur k. Montrer que si son discriminant est un carré dans k, alors $\mathrm{Gal}_k(f) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et que $\mathrm{Gal}_k(f) \simeq S_3$ sinon *(le discriminant du polynôme $(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ est $\Delta = (x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_1-x_3)^2$)*.

b) Déterminer le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ des polynômes suivants :

$$X^3 - X - 1 \text{ et } X^3 + X^2 - 2X - 1 \ .$$

Exercice 2 (Résolvantes) Soit $f(X_1,...,X_n) \in \mathbb{Z}[X_1,...,X_n]$. Soit G un sous-groupe de S_n. On note H le sous-groupe des $\sigma \in G$ tels que $f^\sigma = f$.

On suppose que $P(X)$ est un polynôme séparable de degré n sur un corps k. On note L/k un corps de décomposition de P sur k et $x_1,...,x_n$ ses racines dans L. On définit :

$$R_G(f,P) := \prod_{\sigma H \in G/H} \left(X - f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)})\right) \in L[X] \ .$$

a) Montrer que si $\mathrm{Gal}(L/k) \subseteq G$, alors $R_G(f,P) \in k[X]$.

b) Montrer que si de plus, $R_G(f,P)$ a une racine simple dans k, alors $\mathrm{Gal}(L/k)$ est conjugué à un sous-groupe de H.

Exercice 3 (Groupe de Galois des quartiques) On note V le sous-groupe $\{1,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ de S_4.

a) Montrer que V est distingué dans S_4 et que $V \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Soit G un sous-groupe transitif de S_4. Montrer que G est

$$S_4, A_4, V \text{ ou un sous-groupe isomorphe à } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \text{ ou } D_8$$

(on note D_8 le groupe diédral d'ordre 8 (c'est le groupe des isométries du carré)).

c) Soit $P(X) := X^4 + pX^2 + qX + r$ un polynôme irréductible à coefficients dans un corps k de caractéristique $\neq 2,3$. Vérifier que $P(X)$ a 4 racines distinctes, x_1,x_2,x_3,x_4 dans son corps de décomposition L.

d) On pose $f := (X_1+X_2)(X_3+X_4)$. On note $R(X) := R_{S_4}(f,P)$.

Montrer que $R(X) = (X-\theta_1)(X-\theta_2)(X-\theta_3)$ où :

$$\theta_1 := (x_1+x_2)(x_3+x_4), \theta_2 := (x_2+x_3)(x_1+x_4), \theta_3 := (x_3+x_1)(x_2+x_4) \ .$$

e) Montrer que $R(X) = X^3 - 2pX^2 + (p^2-4r)X + q^2$.

f) Montrer que $\theta_1 - \theta_2 = (x_3-x_1)(x_2-x_4)$. En déduire que $R(X)$ et $P(X)$ ont le même discriminant Δ.

g) Soit G le groupe de Galois de L sur k. On note $G_1 := G \cap V$. Montrer que

$$L^{G\cap V} = k(\theta_1,\theta_2,\theta_3) =: M$$

le corps de décomposition de $R(X)$ sur k.

h) Montrer que le tableau suivant décrit bien toutes les possibilités pour le groupe de Galois du polynôme $P(X)$ sur k :

$\Delta \notin k^2$	$R(X)$ irréductible sur k		$G = S_4$
$\Delta \in k^2$	$R(X)$ irréductible sur k		$G = A_4$
$\Delta \in k^2$	$R(X)$ scindé sur k		$G = V$
$\Delta \notin k^2$	$R(X)$ a une racine dans k	$P(X)$irréductible sur M	$G \simeq D_8$
$\Delta \notin k^2$	$R(X)$ a une racine dans k	$P(X)$réductible sur M	$G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

i) *Applications :* Montrer que si le polynôme $X^4 + bX^2 + d$ est irréductible sur k, alors son groupe de Galois est V si d est un carré dans k, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si $d \notin k^2$ et $\frac{b^2}{d} - 4 \in k^2$ et D_8 sinon.

Déterminer les groupes de Galois sur $\mathbb{Q}$ des polynômes $X^4 - X - 1$ et $X^4 + 8X + 12$.