VI.— Polynômes cyclotomiques

Si $n \geq 1$, on pose :

$$\Phi_n(X) := \prod_{\substack{k=1 \\ k \wedge n = 1}}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n}) \in \mathbb{C}[X] \ .$$

Rappelons que $\Phi_n(X)$ est un polynôme unitaire à coefficients entiers.

Exercice 1 a) Calculer $\Phi_p(X)$ si p est un nombre premier et montrer que $\Phi_p(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ à l'aide du critère d'Eisenstein.

b) Calculer le discriminant de $X^n - 1$. Montrer que pour tout nombre premier p et tout polynôme $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$, $f(X^p) = f(X)^p \bmod p\mathbb{Z}[X]$. En déduire d'abord que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de $\Phi_n(X)$ et si p est un nombre premier qui ne divise pas n, alors le polynôme minimal de z sur $\mathbb{Q}$ annule aussi z^p puis, que $\Phi_n(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

c) Soit $z := e^{2i\pi/n}$. Montrer que $\mathbb{Q}(z)$ est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

d) Montrer que

$$\mathbb{Q}(z) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(z + z^{-1}) = \mathbb{Q}(\cos 2\pi/n) \ .$$

Déterminer l'action du groupe de Galois sur $\cos(2\pi/n)$. Si p est premier, montrer que $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/p))$ est l'unique sous-extension de $\mathbb{Q}(z)$ de degré $\frac{p-1}{2}$.

Exercice 2 Soit p un nombre premier. Soient $\zeta := e^{2i\pi/p}$ et H_f l'unique sous-groupe d'ordre f de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. On définit une $f-$période comme la somme :

$$\zeta_{f,l} := \sum_{a \in lH_f} \zeta^a$$

pour tout l premier à p.

a) Soient e, f des entiers positifs tels que $ef = p - 1$. Soient $\zeta_{f,l_1}, ..., \zeta_{f,l_e}$ les différentes $f-$périodes. Montrer que

$$(X - \zeta_{f,l_1})...(X - \zeta_{f,l_e})$$

est le polynôme minimal de toute $f-$période sur $\mathbb{Q}$ et que toute $f-$période est un élément générique de $\mathbb{Q}(\zeta)^{H_f}$ sur $\mathbb{Q}$.

b) Si $\zeta_{(f,l)}, \zeta_{(f,m)}$ sont des $f-$périodes avec p premier à l, m alors vérifier que :

$$\zeta_{(f,l)}\zeta_{(f,m)} = \sum_{l' \in lH_f} \zeta_{(f,l'+m)} \ .$$

c) On suppose que $p = 17$. Montrer que 3 est un générateur de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ pour la multiplication.

d) Exprimer $\zeta_{8,1}$ et $\zeta_{8,3}$ en fonction de ζ et montrer que :

$$\zeta_{8,1} + \zeta_{8,3} = -1 \text{ et } \zeta_{8,1}\zeta_{8,3} = -4 \ .$$

En déduire $\zeta_{8,1}$ et $\zeta_{8,3}$.

e) De même, montrer que les $4-$périodes sont les racines des polynômes :

$$X^2 - \zeta_{8,1}X - 1 \text{ et } X^2 - \zeta_{8,3}X - 1$$

et en particulier que :

$$\zeta_{4,1} = 1/4\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right) \ ;$$

$$\zeta_{4,2} = 1/4\left(-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)\ ;$$

$$\zeta_{4,3} = 1/4\left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)\ .$$

f) Montrer que $\zeta_{2,1}$ et $\zeta_{2,4}$ sont racines de l'équation :

$$X^2-\zeta_{4,1}X+\zeta_{4,3}=0\ .$$

En déduire que :

$$\cos(2\pi/17) =$$

$$-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}(\zeta) \arrow[d, dash, "2"] & \\
\mathbb{Q}(\zeta)^{H_2} \arrow[r, equal] \arrow[d, dash, "2"] & \mathbb{Q}(\cos(2\pi/17)) \\
\mathbb{Q}(\zeta)^{H_4} \arrow[r, equal] \arrow[d, dash, "2"] & \mathbb{Q}(\sqrt{34-2\sqrt{17}}) \\
\mathbb{Q}(\zeta)^{H_8} \arrow[r, equal] \arrow[d, dash, "2"] & \mathbb{Q}(\sqrt{17}) \\
\mathbb{Q}(\zeta)^{H_{16}} \arrow[r, equal] & \mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$