VIII. Groupes de Galois des quintiques

Exercice 1 (Les sous-groupes transitifs de S_5) On note $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_5)$ le groupe des bijections $\mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_5$ de la forme $x \mapsto ax + b$, $a \in \mathbb{F}_5^\times, b \in \mathbb{F}_5$. On identifie $\mathbb{F}_5$ avec $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_5)$ avec un sous-groupe de S_5.

a) Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_5)$ est le normalisateur de $\langle(12345)\rangle$ dans S_5. Montrer que $\mathrm{Aff}(F_5) \cap A_5$ est engendré par (12345) et $(14)(23)$. En déduire que $\mathrm{Aff}(F_5) \cap A_5$ est isomorphe au groupe diédral d'ordre 10.

b) Montrer que les sous-groupes suivants de S_5 :

$$S_5, A_5, \mathrm{Aff}(\mathbb{F}_5), \mathrm{Aff}(\mathbb{F}_5) \cap A_5, \langle(12345)\rangle$$

sont transitifs.

c) Soit G un sous-groupe transitif de S_5. Vérifier que G contient 1 ou 6 $5-$Sylow.

d) Si G ne contient qu'un seul $5-$Sylow, montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_5)$. Déterminer les sous-groupes de $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_5)$.

e) Si G contient 6 $5-$Sylow, montrer que $G = A_5$ ou S_5 (*indication : compter les* $5-$*cycles.*

Conclusion : les sous-groupes transitifs de S_5 *sont* S_5, A_5 *ou isomorphes à* $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_5)$, *au groupe diédral d'ordre* 10 *ou à* $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Exercice 2 (exemples) a) Factoriser le polynôme $X^5 - X - 1$ modulo 2 et 3. En déduire que son groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ est S_5.

b) Calculer le discriminant du polynôme $X^5 + 20X + 16$. Factoriser-le modulo 3 et 7. En déduire que son groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ est isomorphe au groupe alterné A_5.

c) Montrer que le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ du polynôme $X^5 - 2$ est isomorphe à $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_5)$.

d) Calculer le discriminant du polynôme $P := X^5 - 5X + 12$. Factoriser-le modulo 3. Soient r_i, $1 \leq i \leq 5$, les racines de P.
Pourquoi le polynôme $\prod_{1\leq i<j\leq 5}(X - r_i - r_j)$ est-il à coefficients entiers ?
On admet que :

$$\prod_{1\leq i<j\leq 5}(X-r_i-r_j) = (X^5-5X^3-10X^2+30X-36)(X^5+5X^3+10X^2+10X+4).$$

Montrer que le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ de $X^5 - 5X + 12$ est isomorphe au groupe diédral d'ordre 10.

e) Donner un exemple de polynôme de degré 5 de groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.