IX. Équations résolubles par radicaux

Exercice 1 On note Aff_n le groupe des bijections affines de $\mathbb{Z}/n$ de la forme :

$$f_{a,b} : x \mapsto ax + b,\ a \in (\mathbb{Z}/n)^\times, b \in \mathbb{Z}/n$$

a) Montrer que Aff_n est résoluble.

b) Soient K un corps de caractéristique 0 et $a \in K$. Montrer que le groupe de Galois du polynôme $X^n - a$ sur K est isomorphe à un sous-groupe de Aff_n *(indication : le corps de décomposition de $X^n - a$ sur K est engendré par ζ, une racine primitive $n-$ème de l'unité, et θ une racine $n-$ième de a. Si σ est dans le groupe de Galois, il existe $a \in (\mathbb{Z}/n)^\times, b \in \mathbb{Z}/n$ tels que : $\sigma(\zeta) = \zeta^a$, $\sigma(\theta) = \zeta^b\theta$; considérer alors l'application : $\sigma \mapsto f_{a,b}$).*

c) On suppose que K contient les racines $n-$ièmes de l'unité. Montrer que si $a \in K$, le groupe de Galois de $X^n - a$ sur K est cyclique. Réciproquement si L/K est une extension galoisienne cyclique de degré n, alors il existe $a \in K$ tel que $L = K(\sqrt[n]{a})$.

d) Soit p un nombre premier. Montrer que si $a \in K$, le polynôme $X^p - a$ admet une racine dans K ou est irréductible sur K *(indication soit x une racine de l'équation, considérer $N_{K(x)/K}(x)$).* Dans ce dernier cas, montrer que l'extension $K(\sqrt[p]{a})/K$ est galoisienne cyclique de degré p.

Exercice 2 (Caractérisation des équations résolubles par radicaux) Soient K un corps de caractéristique 0 et Ω une clôture algébrique de K. On dit qu'un élément $z \in \Omega$ peut s'exprimer avec des radicaux (sous-entendu : irréductibles) s'il existe une suite de corps :

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq ... \subseteq K_N$$

tels que $z \in K_N$ et pour tout i, $K_i = K_{i-1}(\sqrt[p_i]{a_i})$ pour certains nombres premiers p_i et éléments $a_i \in K_{i-1}$ pour lesquels l'équation $X^{p_i} - a_i$ est irréductible sur K_{i-1}.

a) Soit $f(X) \in K[X]$. Montrer que si f a une racine dans Ω qui peut s'exprimer avec des radicaux, alors le groupe de Galois de f sur K est résoluble.

b) Montrer par récurrence sur n que les racines $n-$ièmes de l'unité peuvent s'exprimer avec des radicaux sur K.

c) Réciproque du a) : montrer que si le groupe de Galois de f sur K est résoluble, alors toutes les racines de f peuvent s'exprimer avec des radicaux. *On dit dans ce cas que l'équation $f = 0$ est résoluble par radicaux sur K.*

Exercice 3 (Un exemple d'extension par radicaux qui n'est pas normale)

a) Montrer que les extensions $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}(1-i))/\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ sont normales.

b) Montrer que l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}(1-i))/\mathbb{Q}$ n'est pas normale.

Exercice 4 (Les sous-groupes transitifs et résolubles de S_p, p premier) Soit p un nombre premier.

a) Vérifier que Aff_p peut s'identifier à un sous-groupe transitif de S_p et plus précisément au normalisateur de $\langle(12...p)\rangle$.

b) Vérifier que si $\sigma \in \mathrm{Aff}_p$ fixe deux éléments de $\{1, ..., p\}$, alors σ est l'identité.

c) Montrer que tout sous-groupe transitif et résoluble de S_p est conjugué à un sous-groupe de Aff_p.

d) Déduire des questions précédentes que si f est un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré p, alors sont équivalentes :

i) l'équation $f = 0$ est résoluble par radicaux sur $\mathbb{Q}$.

ii) Si x_1, x_2 sont des racines distinctes quelconques de f, alors $\mathbb{Q}(x_1, x_2)$ contient toutes les racines de f.

e) Montrer que si f est un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ avec une racine réelle qui peut s'exprimer avec des radicaux, alors f a toutes ses racines réelles ou une seule racine réelle.