

Feuille d'exercices 10

Développements limités-Calculs de limites

Exercice 1. Etablir pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous un développement limité de f en 0 à l'ordre n .

a) $f(x) = e^x$ $n = 5$ b) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ $n = 6$ c) $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2)$ $n = 7$

d) $f(x) = e^{3x} \sin(2x)$ $n = 4$ e) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ $n = 3$ f) $f(x) = \tan(x)$ $n = 5$

g) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x \sin(x)}$ $n = 3$ h) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $n = 3$ i) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ $n = 3$

j) $f(x) = \sqrt{1+x}$ $n = 4$ k) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ $n = 3$

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
2. La fonction est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 3. Pour a réel fixé on définit la fonction f_a par $f_a(x) = \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$

1. Soit n un entier. Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre $2n - 1$ de la fonction dérivée f'_a .
2. En déduire un développement limité à l'ordre $2n$ de f_a .
3. Soit k un entier. En utilisant le théorème de Taylor-Young, déduire de la question précédente la valeur de $f_a^{(k)}(0)$.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes (sans présupposer leur existence!).

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(x)}{\sin(x)}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x - \frac{3}{2}\sin(2x)}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) + \ln(\cos(x))}{x^4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan(x) - \sin(2x)}{x(1 - \cos(3x))}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{x^2}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2} \right)$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

Exercice 5. Calculer un développement limité de la fonction f pour chacun des cas suivants :

- a) $f(x) = x^2 \ln(x)$ où x tend vers 1 et à l'ordre 5.
- b) $f(x) = \sqrt{x+2}$ où x tend vers 0 et à l'ordre 3.
- c) $f(x) = \ln(x+2)$ où x tend vers 0 et à l'ordre 2.
- d) $f(x) = \sin(x)$ où x tend vers $\frac{\pi}{4}$ et à l'ordre 3.
- e) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 1$ à l'ordre 5, d'abord pour x tendant vers 0 puis pour x tendant vers 1.
- f) $f(x) = \ln(\sin(x))$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ et à l'ordre 3.

Exercice 6.

1. Donner un équivalent simple de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
2. Donner un équivalent simple de $\sin(x)$ en 0. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$
3. Donner un équivalent simple de $\sin(x) - x$ en 0. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$
4. Donner un équivalent simple de $\sin(x) - x$ en 0. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}$

5. Donner un équivalent simple de $1 - \cos(x)$ en 0. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

6. Donner un équivalent simple de $1 - \cos(x)$ en 0. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$

Exercice 7. On désigne par f et g les applications de $] -1, 1[$ vers \mathbb{R} respectivement définies pour $-1 < x < 1$ par : $f(x) = \sin(\ln(1+x))$ et $g(x) = \ln(1 + \sin(x))$

Etablir les développements limités en 0 et à l'ordre 4 des fonctions f et g ; en déduire l'existence d'une constante réelle k (que l'on explicitera) telle que :

$$f(x) - g(x) \underset{0}{\sim} kx^4$$

Exercice 8. Pour chacune des fonctions suivantes proposées ci-dessous un équivalent simple

a) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand x tend vers 0

b) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand x tend vers $+\infty$

c) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand x tend vers 2

d) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand x tend vers 1

e) $f(x) = x^7 + \sqrt{x} + (\ln(x))^2 + e^{2x} + 4x^5 - x^9 + 10^{x+1}$ quand $x \rightarrow +\infty$

Exercice 9.

1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \arctan(x)$

En calculant le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction dérivée f' , en déduire le développement limité de f à l'ordre 5.

2. Calculer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$$

Exercice 10. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $\frac{\pi}{3}$, de la fonction : $f(x) = \cos(x)$

Exercice 11.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 1 de la fonction : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{x^2}$

Exercice 12.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de : $f(x) = \frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x \ln(1+x)}$

Exercice 13.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{\ln(1+x) \operatorname{sh}(x)}$

Exercice 14.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de :

$$f(x) = \ln(1 + \operatorname{sh}(x))$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :

$$g(x) = \frac{\ln(1 + \operatorname{sh}(x))}{\sin(x)}$$

3. Montrer que g est prolongeable par continuité en $x = 0$.

Exercice 15.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{\sin(x) \operatorname{sh}(x)}{\sin(x^2)}$$

2. En déduire un équivalent de $h(x) - 1$ au voisinage de 0.

Exercice 16. Déterminer la limite suivante, sans préjuger qu'elle existe :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos(x)} - e^{\operatorname{ch}(x)}}{\cos(x) - \operatorname{ch}(x)}$$