Feuille 4
Applications linéaires et matrices

Exercice 1.
Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base du noyau de f.
2. Déterminer une base de l'image de f. Quel est le rang de A ?

Exercice 2.
Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.
Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soient $a = e_1 - e_2 + e_3$, $b = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de β à β'. Calculer P^{-1}.
3. Déterminer la matrice R de u dans la base β'.
4.
   a) Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de R
   b) Calculer R^4
   c) En déduire les valeurs de A^{4n}.

Exercice 4.
Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
$u(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$
$u(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$
$u(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique.
2. Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul a de E.
3. Montrer que $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base (b, c) de F.
4. Montrer que $\beta' = \big(a, b, u(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice R de u dans la base β'.

Exercice 5.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ par

$$u(x) = (-10x_1 + 3x_2 + 15x_3, -2x_1 + 3x_3, -6x_1 + 2x_2 + 9x_3)$$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de u. On donnera un vecteur directeur a de $\ker(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$?
4. Déterminer un vecteur b tel que $a = u(b)$.
5. Montrer que $E_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = -x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, déterminer un vecteur directeur de E_{-1} que l'on notera c.
6. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Déterminer la matrice A' de u dans la base β' et donner la relation reliant A et A'.

Exercice 6.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à la base β est : $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\beta' = (a, b, c, d)$ une famille de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$a = e_1 - e_2$, $b = e_1 - e_2 - e_3$, $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3 + e_4$ et $d = -e_1 + 2e_2$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ et $f(d)$ et les exprimer dans la base $\beta' = (a, b, c, d)$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base β'.

Exercice 7.

Soit $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2, a_i \in \mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? On considère l'application

$$f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto (X+1)P'$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que la matrice A de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
3. Montrer que $\mathcal{B}' = (1, X+1, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver la matrice B de f par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'$.
5. Calculer A^2, A^3 et B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. Déterminer le rang de f.
7. Trouver une base de l'image de f.
8. Trouver une base de noyau de f.

Exercice 8.

Soit $u: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, l'application définie pour tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$u(P) = 2P - (X-1)P'$$

Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans β.
3. Déterminer le noyau de u. On notera P_2 un vecteur directeur du noyau.
4. Donner une base de l'image de u.
5. Déterminer un polynôme P_1 tel que $u(P_1) = P_1$
6. Montrer que $\beta' = (1, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.

Exercice 9.

Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P - (X-2)P'$

1. Montrer que f est une application linéaire
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.
4. Déterminer la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$.
5. Montrer que $\beta' = (1, X-2, (X-2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. Déterminer la matrice de passage P de β à β'. Calculer P^{-1}.
7. Quelle est la matrice de f dans la base β'.

Exercice 10.

Soit $u: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ une application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par

$$u(P) = P + (1-X)P' + 2P''$$

On appelle $P_1 = 1 - X, P_2 = 1$ et $P_3 = 1 + 2X - X^2$

On appelle $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\beta' = (P_1, P_2, P_3)$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
4. Montrer que β' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.

Exercice 11.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base β est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur a qui engendre le noyau de u.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^4, u(x) = \lambda x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Trouver un vecteur directeur b de E_{-1}. Déterminer une base (c, d) de E_1.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Déterminer la matrice de u dans la base β'.

Exercice 12.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $a_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 - 2e_4$, $a_2 = e_2 + e_3$, $a_3 = e_1 + 3e_2 + 5e_3 - 3e_4$ et $c = -e_1 - e_2 - e_3$

On pose $F = Vect(a_1, a_2, a_3)$.

1. Montrer que $\beta' = (a_1, a_2, a_3, c)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice P de passage de β à β'.
2. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
3. Montrer que pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$ en déduire que $v: F \to F$ définie par $v(x) = u(x)$ est un endomorphisme de F, déterminer la matrice de v dans la base $\beta_a = (a_1, a_2, a_3)$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus Vect(c)$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^4$ il existe un unique couple de vecteurs $(f, g) \in F \times Vect(c)$ tels que : $x = f + g$, calculer $u(x)$.

Exercice 13.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire f définie par

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3; f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3; f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

On note $f^2 = f \circ f$.

1. Déterminer la matrice de f dans β.
2. Montrer que $E_1 = \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$ et que $N_{-1} = \ker(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer a, b deux vecteurs tels que $E_1 = Vect(a)$ et $N_{-1} = Vect\big(b, f(b)\big)$. A-t-on $E_1 \oplus N_{-1} = \mathbb{R}^3$?
4. Montrer que $\beta' = \big(a, b, f(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. On appelle $\beta' = \big(a, b, f(b)\big)$, quelle est la matrice de f dans β'.
6. Quelle est la matrice de f^2 dans β'

Exercice 14.

Partie I

Soit g une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$g(P) = \big(P(-1), P(1)\big)$$

1. Montrer que g est une application linéaire.
2. Déterminer une base du noyau et déterminer l'image de g.

Partie II

Soit h une application linéaire de $\mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$h(P) = \big(P(-1), P(1)\big)$$

3. Montrer que h est bijective.