**Feuille 5**
**Nombres réels**

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$
$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$$
2. En déduire que
$$A = \left\{\frac{mn}{(m+n)^2}, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*\right\}$$
Admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

Correction exercice 1 :

1. $m$ et $n$ étant strictement positifs on a $0 < \frac{mn}{(m+n)^2}$
$$\frac{1}{4} - \frac{mn}{(m+n)^2} = \frac{(m+n)^2 - 4mn}{(m+n)^2} = \frac{m^2 + 2mn + n^2 - 4mn}{(m+n)^2} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{(m+n)^2} = \frac{(m-n)^2}{(m+n)^2} \geq 0$$
Donc
$$\frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$$
2. $\frac{mn}{(m+n)^2}$ est borné donc $A$ admet une borne inférieure $a$ telle que $0 \leq a$ (car $a$ est le plus grand des minorants) et une borne supérieure $b$ telle que $b \leq \frac{1}{4}$ (car $b$ le le plus petit des majorants).
Comme pour tout $m > 0$ et $n > 0$, $a \leq \frac{mn}{(m+n)^2}$, en prenant $m = 1$ on a :
$$a \leq \frac{n}{(1+n)^2} \to 0$$
Ce qui implique que $a \leq 0$, on a donc $a = 0$.
Comme pour tout $m > 0$ et $n > 0$, $\frac{mn}{(m+n)^2} \leq b$, en prenant $m = n$ on a :
$$\frac{n^2}{(n+n)^2} \leq b$$
Puis
$$\frac{n^2}{(n+n)^2} = \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$$
Montre que $\frac{1}{4} \leq b$ et finalement $b = \frac{1}{4}$.

Exercice 2.

Pour chacun des exercices suivants, déterminer s'il y a une borne inférieure, une borne supérieure, si oui, les déterminer.
$$A = \left\{\frac{2^n}{2^n - 1}, n \in \mathbb{N}^*\right\}; \qquad B = \left\{\frac{1}{1 - 2^{-n}}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$
$$C = \left\{\frac{x^3}{|x^3 - 1|}, x \in ]0,1[ \cup ]1, +\infty[\right\}; \quad D = \left\{\frac{x^n}{|x^n - 1|}, x \in ]0,1[ \cup ]1, +\infty[, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Correction exercice 2 :

On pose $u_n = \frac{2^n}{2^n - 1}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeur strictement positive

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}}{\frac{2^n}{2^n-1}} = 2 \times \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1} = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1} < 1$$

Donc cette suite est strictement décroissante, on en déduit que

$$\sup(A) = u_1 = \frac{2}{2-1} = 2 \qquad \text{et} \qquad \inf(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = 1$$

Remarque : $A$ admet un maximum 2 mais pas de minimum.

$\frac{1}{1-2^{-n}} = \frac{2^n}{2^n-1}$, par conséquent $A = B$ ces deux ensembles ont les mêmes bornes supérieures et inférieures.

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x\neq 1}} \frac{x^3}{|x^3 - 1|} = +\infty$$

Donc $C$ n'admet pas de borne supérieure.

Il est évident que pour tout $x \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$, $\frac{x^3}{|x^3-1|} \geq 0$ donc 0 est un minorant de $C$ par conséquent

$$0 \leq \inf(C)$$

Puis remarquons que

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{x^3}{|x^3 - 1|} = 0$$

Donc

$$\inf(C) \leq 0$$

En conclusion

$$\inf(C) = 0$$

Remarque : 0 n'est pas un minimum.

Remarque : on aurait pu étudier la fonction

$$]0,1[ \cup ]1,+\infty[ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^3}{|x^3 - 1|}$$

En faisant attention à distinguer les cas $x \in ]0,1[$ (où $x^3 - 1 < 0$) et $x \in ]1,+\infty[$ (où $x^3 - 1 > 0$).

Pour l'ensemble $D$ on fait strictement le même raisonnement que pour l'ensemble $C$. $D$ n'a pas de borne supérieure et sa borne inférieure est 0.

Exercice 3.

Soit

$$X = \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} ; p, q \in \mathbb{N}^*\right\}$$

1. Montrer que $X$ est majoré et minoré.
2. En déduire que $X$ possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Correction exercice 3 :

1. Comme $p \geq 1$ et $q \geq 1$, $0 < \frac{1}{p} \leq 1$ et $0 < \frac{1}{q} \leq 1$, on a donc

$$0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + 1 = 2$$

   Ce qui montre bien que $X$ est majoré et minoré.

2. Pour $p = q = 1$, on a

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=2$$

Donc 2 est le maximum, par conséquent sa borne supérieure.
0 est un minorant de $X$ donc $0 \leq \inf(X)$
Et

$$\lim_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=0$$

Donc $\inf(X) \leq 0$ et finalement $\inf(X)=0$

Exercice 4.

Soit

$$X=\left\{\frac{(-1)^n}{n}+\frac{2}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

1. Montrer que $X$ est minoré et majoré.
2. Montrer que $X$ admet un plus grand élément et le déterminer.
3. Montrer que $X$ admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Correction exercice 4 :

1. La première idée serait de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n=\frac{(-1)^n+2}{n}$ est croissante ou décroissante mais cela ne marche pas, vérifions le tout de même

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{(-1)^{n+1}+2}{n+1}-\frac{(-1)^n+2}{n}=\frac{((-1)^{n+1}+2)n-((-1)^n+2)(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n((-1)^{n+1}+2-(-1)^n-2)-((-1)^n+2)}{n(n+1)}=\frac{2(-1)^{n+1}n-(-1)^n-2}{n(n+1)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)-2}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Selon la parité de $n$ cette expression est positive ou négative, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas monotone, il faut faire autrement.

Pour voir ce qu'il se passe on va calculer les premiers termes de cette suite

$$u_1=1;\ u_2=\frac{3}{2};\ u_3=\frac{1}{3};\ u_4=\frac{3}{4}; u_5=\frac{1}{5}; u_6=\frac{1}{2}$$

Cela donne l'idée d'étudier les deux sous-suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$v_n=u_{2n}=\frac{3}{2n} \quad \text{et} \quad w_n=u_{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$$

Ces deux suites sont manifestement positive, décroissante et tendent vers 0, on en conclut que

$$0<u_n<\max(v_1,w_0)=\frac{3}{2}$$

2. D'après l'étude précédente $\frac{3}{2}=u_2$ est le plus grand élément (le maximum)
3. $\frac{3}{2}$ est un maximum et donc la borne supérieure.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=0$$

Donc $\inf(X) \leq 0$,
Et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, 0 est un minorant donc on a $\inf(X) \geq 0$ et finalement

$$\inf(X)=0$$

Exercice 5.

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B = \{y = -x; x \in A\}$

1. Montrer que $B$ est minoré si et seulement si $A$ est majoré.
2. En supposant que $A$ est majoré, démontrer que $B$ admet une borne inférieure et que
$$\inf(B) = -\sup(A)$$

Correction exercice 5 :

1. Si $B$ est minoré alors il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in B$, $m \leq y$ alors il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in B$, $-y \leq -m$, comme tous les éléments de $A$ sont de la forme $-y$, $y \in B$, cela montre qu'il existe $-m \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x \in A$, $x \leq -m$, autrement dit $A$ est majoré.
   Réciproque :
   Si $A$ est majoré, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x \in A$, $x \leq M$ alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x \in A$, $-M \leq -x$, comme tous les éléments de $B$ sont de la forme $-x$, $x \in A$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $y \in B$, $-M \leq y$, autrement dit $B$ est minoré.
2. Si $A$ est majoré, $A$ admet une borne supérieure $\sup(A)$ et d'après le 1. $B$ est minoré et donc admet une borne inférieure $\inf(B)$.
   Pour tout $M$ un majorant de $A$ : $\sup(A) \leq M$
   D'après 1. $-M$ est un minorant de $B$ : $-M \leq \inf(B)$
   On en déduit que pour tout $M$, majorant de $A$ : $-\inf(B) \leq M$, cela entraine que
   $$-\inf(B) \leq \sup(A)$$
   De même pour $m$ un minorant de $B$ : $m \leq \inf(B)$
   D'après 1. $-m$ est un majorant de $A$ : $\sup(A) \leq -m$
   On en déduit que pour tout $m$, minorant de $B$ : $\sup(A) \leq -m$, cela entraine que
   $$\sup(A) \leq -\inf(B)$$
   Donc
   $$\sup(A) = -\inf(B) \Leftrightarrow \inf(B) = -\sup(A)$$

Exercice 6.

Déterminer les ensembles suivants, mettre ces ensemble sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}, x^2 < 1\}$$
$$A_2 = \{x \in \mathbb{R}, x^3 \leq 1\}$$
$$A_3 = \left\{x \in \mathbb{R}, -1 < \frac{2x}{x^2+1} < 1\right\}$$
$$A_4 = \left\{x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{|x|} > 1\right\}$$
$$A_5 = \left\{x \in \mathbb{R}, -1 < \frac{1}{x^2-1} < 1\right\}$$

Correction exercice 6 :

$$A_1 = ]-1,1[$$
$$A_2 = ]-\infty, 1]$$
$$1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 = \frac{(x^2+1)^2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$$

On pouvait aussi étudier la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

On en déduit que :

$$A_3 = ]-\infty, -1[ \cup ]-1,1[ \cup ]1, +\infty[$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{|x|} > 1 \Leftrightarrow |x| < 1$$

$$A_4 = ]-1,0[ \cup ]0,1[$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

$$1 - \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 = \frac{(x^2-1)^2 - 1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1 - 1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-2)}{(x^2-1)^2} > 0$$

Comme $x^2 - 2$ est positif si et seulement si $x \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[ \cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$

Donc

$$\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[ \cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$$

Par conséquent

$$A_5 = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[ \cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$$

Exercice 7.

Montrer que le nombre réel

$$\gamma = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}$$

Est un entier naturel que l'on déterminera.

Indication : on pourra monter que $\gamma$ est solution d'une équation du troisième degré à coefficients entiers.

Correction exercice 7 :

$$\gamma^3 = \left(\sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}\right)^3$$

$$= \left(\sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}}\right)\sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}} + 3\sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}}\left(\sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}\right)^2$$
$$+ \left(\sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}\right)^3$$
$$= 27 + 6\sqrt{21} + 3\sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}}\sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}\left(\sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}\right) + 27$$
$$- 6\sqrt{21} = 54 + 3\sqrt[3]{\left(27 + 6\sqrt{21}\right)\left(27 - 6\sqrt{21}\right)} \times \gamma = 54 + 3\gamma\sqrt[3]{27^2 - \left(6\sqrt{21}\right)^2}$$
$$= 54 + 3\gamma\sqrt[3]{3^6 - 6^2 \times 21} = 54 + 3\gamma\sqrt[3]{3^6 - 2^2 \times 3^2 \times 3 \times 7} = 54 + 3\gamma\sqrt[3]{3^3(3^3 - 2^2 \times 7)}$$
$$= 54 + 3 \times 3\gamma\sqrt[3]{-1} = 54 - 9\gamma$$

Donc $\gamma$ vérifie : $\gamma^3 + 9\gamma - 54 = 0$, autrement dit $\gamma$ est une solution de $X^3 + 9X - 54 = 0$

Une solution presque évidente de cette équation est $X = 3$, en factorisant par $X - 3$ on obtient

$$X^3 + 9X - 54 = (X-3)(X^2 + 3X + 18)$$

$X^2 + 3X + 18$ a un discriminant négatif, donc il n'admet pas de racine réelles, la seule solution de $X^3 + 9X - 54 = 0$ est 3, par conséquent $\gamma = 3 \in \mathbb{N}$

Exercice 8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$
2. En déduire la partie entière du nombre réel

$$S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$$

Correction exercice 8 :

1.

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{2(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Cela montre l'inégalité de gauche

$$2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} = 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) = \frac{2\big(n-(n-1)\big)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} > \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Cela montre l'inégalité de droite.

2.

$$\sum_{n=1}^{9999}(2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}) = 2\sum_{n=1}^{9999}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 2\left(\sqrt{9999+1} - \sqrt{1}\right) = 199$$

Et

$$\sum_{n=1}^{9999}(2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}) < \sum_{n=1}^{9999}\frac{1}{\sqrt{n}} = S - \frac{1}{\sqrt{9999}}$$

Donc

$$S > 199 + \frac{1}{\sqrt{9999}}$$

$$\sum_{n=1}^{10000}(2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}) = 2\sum_{n=1}^{10000}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 2\left(\sqrt{10000} - \sqrt{0}\right) = 200$$

Et

$$\sum_{n=1}^{10000}(2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}) > \sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}} = S$$

Donc

$$S < 200$$

D'où l'on déduit un encadrement de $S$

$$199 + \frac{1}{\sqrt{9999}} < S < 200$$

Donc $E(S) = 199$.