Feuille 4
Applications linéaires et matrices

Exercice 1.
Soit $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base du noyau de f.
2. Déterminer une base de l'image de f. Quel est le rang de A ?

Correction exercice 1.

1. soit $x \in \mathbb{R}^4$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$x \in \ker(f) \Leftrightarrow AX = O_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -4x_2 + 4x_3 - 14x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (-3x_3, x_3, x_3, 0) = x_3(-3,1,1,0)$$

On pose $= (-3,1,1,0)$ $\ker(f) = Vect(a)$, c'est une base de $\ker(f)$.

2. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim\big(Im(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^4)$$

Donc

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$$

Comme

$$Im(f) \subset \mathbb{R}^3$$

On a

$$Im(f) = \mathbb{R}^3$$

Et

$$rg(A) = 3$$

Exercice 2.
Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction exercice 2.

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\in\ker(A)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&1&1\\2&1&1&1&1\\1&1&1&2&1\\2&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5=0\\2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0\\2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5=0\\2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-2L_1\\L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5=0\\-x_2-3x_3-x_4-x_5=0\\-x_3+x_4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5=0\\-x_2-3x_3-x_4-x_5=0\\x_3=x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_2-2x_3-x_4-x_5\\x_2=-3x_3-x_4-x_5\\x_3=x_4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_2-2x_4-x_4-x_5\\x_2=-3x_4-x_4-x_5\\x_3=x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-(-4x_4-x_5)-2x_4-x_4-x_5\\x_2=-4x_4-x_5\\x_3=x_4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_4\\x_2=-4x_4-x_5\\x_3=x_4\end{cases}$$

Donc

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_4,-4x_4-x_5,x_4,x_4,x_5)=x_4(1,-4,1,1,0)+x_5(0,-1,0,0,1)$$

Les vecteurs $(1,-4,1,1,0)$ et $(0,-1,0,0,1)$ ne sont pas proportionnels et ils engendrent le noyau, donc $\ker(A)$ est de dimension 2.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(A))+\dim\big(Im(A)\big)=5$$

Ce qui montre que $rang(A)=\dim\big(Im(A)\big)=3$.

Exercice 3.

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A=\begin{pmatrix}1&4&4\\-1&-3&-3\\0&2&3\end{pmatrix}$$

Soient $a=e_1-e_2+e_3$, $b=2e_1-e_2+e_3$ et $c=2e_1-2e_2+e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que $\beta'=(a,b,c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de β à β'. Calculer P^{-1}.
3. Déterminer la matrice R de u dans la base β'.
4.
   a) Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de R
   b) Calculer R^4
   c) En déduire les valeurs de A^{4n}.

Correction exercice 3.

1. Pour tous α,β,γ réels

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow\alpha(1,-1,1)+\beta(2,-1,1)+\gamma(2,-1,2)=(0,0,0)\Rightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}\alpha+2\beta+2\gamma=0\\-\alpha-\beta-2\gamma=0\\\alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2+L_1\\L_3+L_2\end{matrix}\begin{cases}\beta=0\\-\alpha-\beta-2\gamma=0\\-\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

(a, b, c) est une famille libre dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base.

Autre méthode

$$\det(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+2) = -1 \neq 0$$

Donc (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_1 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + L_2 \end{matrix}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_1 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ -x_3 = y_2 + y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 + y_1 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = -y_2 - y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2y_1 - 2y_2 + 2y_2 + 2y_3 + y_1 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = -y_2 - y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -y_1 + 2y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = -y_2 - y_3 \end{cases}$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Les coordonnées de $u(a)$ dans la base β sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $u(a) = a$

Les coordonnées de $u(b)$ dans la base β sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $u(b) = c$

Les coordonnées de $u(c)$ dans la base β sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc $u(c) = -b$

Par conséquent

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

a)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R$$

b)

$$R^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$
$$R^4=R^2R^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

c) $R=P^{-1}AP\Leftrightarrow A=PRP^{-1}$

$$A^4=PRP^{-1}PRP^{-1}PRP^{-1}PRP^{-1}=PR^4P^{-1}=PIP^{-1}=I$$

Donc

$$A^{4n}=(A^4)^n=I^n=I$$

Exercice 4.

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$u(e_1)=-3e_1+2e_2-4e_3$

$u(e_2)=e_1-e_2+2e_3$

$u(e_3)=4e_1-2e_2+5e_3$

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique.
2. Montrer que $E=\{x\in\mathbb{R}^3,u(x)=x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul a de E.
3. Montrer que $F=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,-2x_1+2x_2+3x_3=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base (b,c) de F.
4. Montrer que $\beta'=\big(a,b,u(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que $E\oplus F=\mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice R de u dans la base β'.

Correction exercice 4.

1. $A=Mat_\beta(u)=\begin{pmatrix}-3&1&4\\2&-1&-2\\-4&2&5\end{pmatrix}$
2. $u(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3}\in E$

   Soient $x\in E$ et $y\in E$ et λ et μ deux réels, $u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y)=\lambda x+\mu y$, donc $\lambda x+\mu y\in E$, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in E\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-3&1&4\\2&-1&-2\\-4&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x_1+x_2+4x_3=x_1\\2x_1-x_2-2x_3=x_2\\-4x_1+2x_2+5x_3=x_3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-4x_1+x_2+4x_3=0\\2x_1-2x_2-2x_3=0\\-4x_1+2x_2+4x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\begin{cases}-4x_1+x_2+4x_3=0\\x_1-x_2-x_3=0\\-2x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{array}{c}L_1\\4L_2+L_1\\2L_3-L_1\end{array}\begin{cases}-4x_1+x_2+4x_3=0\\-3x_2=0\\x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=0\end{cases}$$

   Une base de E est le vecteur $a=(1,0,1)$ et bien sur $\dim(E)=1$.
3. Il est clair que le vecteur nul est dans F.

   Soient $x\in F$ et $y\in F$ et λ et μ deux réels

   $\lambda x+\mu y=(\lambda x_1+\mu y_1,\lambda x_2+\mu y_2,\lambda x_3+\mu y_3)$,

$$-2(\lambda x_1+\mu y_1)+2(\lambda x_2+\mu y_2)+3(\lambda x_3+\mu y_3)=\lambda(-2x_1+2x_2+3x_3)+\mu(-2y_1+2y_2+3y_3)=0$$

   Donc $\lambda x+\mu y\in F$. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in F \Leftrightarrow x=\left(x_2+\frac{3}{2}x_3,x_2,x_3\right)=x_2(1,1,0)+\frac{x_3}{2}(3,0,2)$$

On pose $b=(1,1,0)$ et $c=(3,0,2)$

(b,c) est une famille génératrice de F formée de deux vecteurs non proportionnels, cette famille est donc libre.

Une base de F est (b,c).

4. $u(b)$ a pour coordonnées dans β :

$$\begin{pmatrix}-3&1&4\\2&-1&-2\\-4&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\alpha a+\beta b+\gamma u(b)=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow \alpha(1,0,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(-2,1,-2)=(0,0,0)\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha+\beta-2\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\\ \alpha-2\gamma=0\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha+\beta-2\gamma=0\\ \beta=-\gamma\\ \alpha=2\gamma\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}2\gamma-\gamma-2\gamma=0\\ \beta=-\gamma\\ \alpha=2\gamma\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{array}\right.$$

(a,b,c) est une famille libre dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base.

Autre méthode

$$\det(a,b,u(b))=\begin{vmatrix}1&1&-2\\0&1&1\\1&0&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\0&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-2\\1&1\end{vmatrix}=-2+3=1\neq 0$$

Donc $(a,b,u(b))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. $\dim(E)+\dim(F)=1+2=3=\dim(\mathbb{R}^3)$

$(1,0,1)\notin F$ car $-2\times 1+2\times 0+3\times 1=1\neq 0$ donc $E\cap F=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Donc $E\oplus F=\mathbb{R}^3$.

6. $u(u(b))$ a pour coordonnées dans β.

$$\begin{pmatrix}-3&1&4\\2&-1&-2\\-4&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Donc $u(u(b))=-b$

$$mat_{\beta'}(u)=\begin{array}{cc}\begin{array}{ccc}u(a)&u(b)&u(u(b))\end{array}&\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}&\begin{array}{c}a\\b\\u(b)\end{array}\end{array}$$

Exercice 5.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout $x=(x_1,x_2,x_3)$ par

$$u(x)=(-10x_1+3x_2+15x_3,-2x_1+3x_3,-6x_1+2x_2+9x_3)$$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de u. On donnera un vecteur directeur a de $\ker(u)$.
3. A-t-on $\ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^3$?
4. Déterminer un vecteur b tel que $a=u(b)$.
5. Montrer que $E_{-1}=\{x\in\mathbb{R}^3,u(x)=-x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, déterminer un vecteur directeur de E_{-1} que l'on notera c.
6. Montrer que $\beta'=(a,b,c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Déterminer la matrice A' de u dans la base β' et donner la relation reliant A et A'.

Correction exercice 5.

1.

$$A=\begin{pmatrix}-10 & 3 & 15\\ -2 & 0 & 3\\ -6 & 2 & 9\end{pmatrix}$$

2.

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in\ker(u)\Leftrightarrow u(x)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\begin{cases}-10x_1+3x_2+15x_3=0\\ -2x_1+3x_3=0\\ -6x_1+2x_2+9x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}\\5L_2-L_1\\L_3-3L_2\end{matrix}\begin{cases}-10x_1+3x_2+15x_3=0\\ 12x_2=0\\ 2x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-10x_1+15x_3=0\\ x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{2}x_3\\ x_2=0\end{cases}$$

$$x=\left(\frac{3}{2}x_3,0,x_3\right)=\frac{x_3}{2}(3,0,2)$$

On pose $a=(3,0,2)$ et alors $\ker(u)=Vect(a)$ et $\dim(\ker(u))=1$

D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)\Leftrightarrow\dim\big(Im(u)\big)=2$

3. Le problème est de savoir si $\ker(u)\cap im(u)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ car $\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)$

Première méthode :

On cherche une base de $Im(u)$ (ce qui revient à choisir deux des trois vecteurs parmi $u(e_1),u(e_2)$ et $u(e_3)$ car ces vecteurs sont deux à deux non proportionnels et que la dimension de l'image de u est 2, puis de montrer que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$, c'est long, on passe)

Deuxième méthode

D'après la matrice, il est clair que $a=u(e_2)$, comme $\ker(u)=Vect(a)$ on a $\ker(u)\subset im(u)$ et donc $\ker(u)\cap Im(u)\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, ce qui montre que l'on n'a pas $\ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^3$.

4.

Première méthode

On pose $X_a=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ et $X_b=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ les coordonnées de a et de b dans la base canonique et on résout le système

$$u(b)=a\Leftrightarrow AX_b=X_a\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-10 & 3 & 15\\ -2 & 0 & 3\\ -6 & 2 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$$

C'est long

Deuxième méthode

On remarque que $u(e_2)=a$ donc un vecteur b qui vérifie $u(b)=a$ est par exemple $b=e_2$

Remarque :

Ce n'est pas le seul mais l'énoncé demande « un vecteur b tel que $u(b)=a$ »

5. $u(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}=-0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3}\in E_{-1}$

Soit $x_1\in E_{-1}$ et $x_2\in E_{-1}$, on a $u(x_1)=-x_1$ et $u(x_2)=-x_2$, alors pour tout $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ on a

$$u(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1u(x_1)+\lambda_2u(x_2)=\lambda_1(-x_1)+\lambda_2(-x_2)=-(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)$$

Donc

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\in E_{-1}$$

Et E_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Autre méthode :

$E_{-1}=\ker(u+id)$ donc E_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On pose $X_c=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ les coordonnées de c dans la base canonique

$$u(c)=-c \Leftrightarrow AX_c=-X_c \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-10&3&15\\-2&0&3\\-6&2&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-10x_1+3x_2+15x_3=-x_1\\-2x_1+3x_3=-x_2\\-6x_1+2x_2+9x_3=-x_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-9x_1+3x_2+15x_3=0\\-2x_1+x_2+3x_3=0\\-6x_1+2x_2+10x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x_1+x_2+5x_3=0\\-2x_1+x_2+3x_3=0\\-3x_1+x_2+5x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x_1+x_2+5x_3=0\\-2x_1+x_2+3x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2-L_1\end{array}\begin{cases}-3x_1+x_2+5x_3=0\\x_1-2x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6x_3+x_2+5x_3=0\\x_1=2x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=x_3\\x_1=2x_3\end{cases}$$

$$x=(2x_3,x_3,x_3)=x_3(2,1,1)$$

On prend $c=(2,1,1)$ et on a $E_{-1}=Vect(c)$

6.

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\alpha(3,0,2)+\beta(0,1,0)+\gamma(2,1,1)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\begin{cases}3\alpha+2\gamma=0\\\beta+\gamma=0\\2\alpha+\gamma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\dfrac{2}{3}\gamma\\\beta=-\gamma\\\alpha=-\dfrac{1}{2}\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

(a,b,c) est une famille libre dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

7.

$$u(a)=0_{\mathbb{R}^3},u(b)=a,u(c)=-c$$

Donc

$$A'=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$
$$A'=P^{-1}AP$$

Où

$$P=\begin{pmatrix}3&0&2\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$$

Exercice 6.

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à la base β est : $A=\begin{pmatrix}-6&-3&0&6\\6&3&0&-6\\0&0&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

Soit $\beta'=(a,b,c,d)$ une famille de $\mathbb{R}^4$ définie par :
$a=e_1-e_2$, $b=e_1-e_2-e_3$, $c=2e_1-2e_2+e_3+e_4$ et $d=-e_1+2e_2$

1. Montrer que $\beta'=(a,b,c,d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ et $f(d)$ et les exprimer dans la base $\beta'=(a,b,c,d)$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base β'.

Correction exercice 6.

1. Pour tous α,β,γ et δ réels

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=0_{\mathbb{R}^4}\Rightarrow \alpha(1,-1,0,0)+\beta(1,-1,1,0)+\gamma(2,-2,1,1)+\delta(-1,2,0,0)=(0,0,0,0)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma-\delta=0\\-\alpha-\beta-2\gamma+2\delta=0\\\beta+\gamma=0\\\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha-\delta=0\\-\alpha+2\delta=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\delta=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

En faisant la somme des deux premières lignes. Donc (a,b,c,d) est une famille libre de 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, c'est une base.

Autre méthode

$\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\-1&-1&-2&2\\0&-1&1&0\\0&0&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&-1&2\\0&-1&0\end{vmatrix}$ en développant par rapport à la dernière ligne. Puis $\det(a,b,c,d)=-\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}=-1$, de nouveau en développant par rapport à la dernière ligne. Ce déterminant est non nul donc (a,b,c,d) est une base de $\mathbb{R}^4$.

2.

Les coordonnées de $f(a)$ dans la base β sont : $\begin{pmatrix}-6&-3&0&6\\6&3&0&-6\\0&0&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\0\\0\end{pmatrix}$

$$f(a)=-3e_1+3e_2=-3(e_1-e_2)=-3a$$

Les coordonnées de $f(b)$ dans la base β sont : $\begin{pmatrix}-6&-3&0&6\\6&3&0&-6\\0&0&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}$

$$f(b)=-3e_1+3e_2+3e_3=-3(e_1-e_2-e_3)=-3b$$

Les coordonnées de $f(c)$ dans la base β sont : $\begin{pmatrix}-6&-3&0&6\\6&3&0&-6\\0&0&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$f(c)=0_{\mathbb{R}^4}$$

Les coordonnées de $f(d)$ dans la base β sont : $\begin{pmatrix}-6&-3&0&6\\6&3&0&-6\\0&0&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$f(d)=0_{\mathbb{R}^4}$$

3. $Mat_{\beta'}(f)=\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

Exercice 7.

Soit $\mathbb{R}_2[X]=\{a_0+a_1X+a_2X^2, a_i\in\mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? On considère l'application

$$f:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X]$$
$$P\longmapsto (X+1)P'$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que la matrice A de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$$

3. Montrer que $\mathcal{B}' = (1, X+1, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver la matrice B de f par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'$.
5. Calculer A^2, A^3 et B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. Déterminer le rang de f.
7. Trouver une base de l'image de f.
8. Trouver une base de noyau de f.

Correction exercice 7.

1. Si $\in \mathbb{R}_2[X]$, $d°(X+1)P' \leq 1+2-1 = 2$ donc f est bien une application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
$$\begin{aligned} f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (X+1)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' = (X+1)\left(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2'\right) = \lambda_1 (X+1) P_1' + \lambda_2 (X+1) P_2' \\ = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2) \end{aligned}$$
donc f est linéaire, c'est même un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2.
$$f(1) = (X+1) \times 0 = 0 = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2$$
$$f(X) = (X+1) \times 1 = 0 = 1 \times 1 + 1 \times X + 0 \times X^2$$
$$f(X^2) = (X+1) \times 2X = 0 = 0 \times 1 + 2 \times X + 2 \times X^2$$
Donc $A = \begin{array}{c c} \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix} \end{array}$
3. $\alpha + \beta(X+1) + \gamma(X+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \gamma X^2 + (\beta + 2\gamma)X + \alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \right.$
Donc B′ est une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 ($\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4.
$$f(1) = (X+1) \times 0 = 0 = 0 \times 1 + 0 \times (X+1) + 0 \times (X+1)^2$$
$$f(X+1) = (X+1) \times 1 = 0 = 0 \times 1 + 1 \times (X+1) + 0 \times (X+1)^2$$
$$f((X+1)^2) = (X+1) \times 2(X+1) = 0 = 0 \times 1 + 0 \times (X+1) + 2 \times (X+1)^2$$
Donc
$$B = \begin{array}{c c} \begin{matrix} f(1) & f(X+1) & f((X+1)^2) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ X+1 \\ (X+1)^2 \end{matrix} \end{array}$$
5.
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$
Si $k > 0$
$$B^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$
Et $B^0 = I$

6. La première colonne de la matrice A est nulle, donc le rang de A est inférieur ou égal à 2, les deux suivantes ne sont pas proportionnelles, donc le rang de A est au moins 2.
$$rg(A) = rg(f) = 2$$
7. $Im(f)$ est engendré par $f(X) = 1 + X$ et $f(X^2) = 2X + 2X^2$, cette famille constitue une base de $Im(f)$.
8. D'après le théorème du rang, la dimension du noyau de f est 1, car
$$\dim(\ker(f)) + \dim\big(Im(f)\big) = dim\mathbb{R}_2[X] = 3$$
Or $f(1) = 0$, donc le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par le « vecteur » 1. (C'est-à-dire le polynôme constant égale à 1).

Exercice 8.

Soit $u: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, l'application définie pour tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ par :
$$u(P) = 2P - (X-1)P'$$
Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans β.
3. Déterminer le noyau de u. On notera P_2 un vecteur directeur du noyau.
4. Donner une base de l'image de u.
5. Déterminer un polynôme P_1 tel que $u(P_1) = P_1$
6. Montrer que $\beta' = (1, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.

Correction exercice 8.
1. Si $d°P \leq 2$ alors $d°P' \leq 1$ et $d°(X-1)P' \leq 2$ donc $d°u(P) \leq 2$
D'autre part
$$u(\lambda P + \mu Q) = 2(\lambda P + \mu Q) - (X-1)(\lambda P + \mu Q)' = 2(\lambda P + \mu Q) - (X-1)(\lambda P' + \mu Q')$$
$$= \lambda(2P - (X-1)P') + \mu(2Q - (X-1)Q') = \lambda u(P) + \mu u(Q)$$
Cela montre que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2.
$$u(1) = 2 \times 1 - (X-1) \times 0 = 2;$$
$$u(X) = 2X - (X-1) \times 1 = X + 1;$$
$$u(X^2) = 2X^2 - (X-1) \times 2X = 2X$$
Par conséquent
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. Soit $P = aX^2 + bX + c$
$$u(P) = au(X^2) + bu(X) + cu(1) = 2aX + b(1+X) + 2c = (2a+b)X + b + 2c$$
Donc
$$u(P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{b}{2} \\ c = -\dfrac{b}{2} \end{cases}$$
Et
$$P = -\frac{b}{2}X^2 + bX - \frac{b}{2} = -\frac{b}{2}(X^2 - 2X + 1) = -\frac{b}{2}(X-1)^2$$
Le noyau de u est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $P_2 = (X-1)^2$

4. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$$

Donc

$$\dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\ker(u)) = 3 - 1 = 2$$

$u(1) = 2$ et $u(X) = 1 + X$ sont deux polynômes non proportionnels de l'image de u, ils forment donc une famille libre dans un espace de dimension 2, $(2, 1 + X)$ est une base de $Im(u)$.

5. Soit $P = aX^2 + bX + c$

$$u(P) = P \Leftrightarrow (2a + b)X + b + 2c = aX^2 + bX + c \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a \\ 2a + b = b \\ b + 2c = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a = 0 \\ c = -b \end{cases}$$

$$P = bX - b = b(X - 1)$$

$$P_1 = X - 1$$

6.

$$\alpha + \beta(X - 1) + \gamma(X - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta + \gamma + (\beta - 2\gamma)X + \gamma X^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

β' est un famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

7. $u(1) = 2 \times 1$, $u(P_1) = P_1$ et $u(P_2) = 0$, donc

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(1) & u(P_1) & u(P_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ P_1 \\ P_2 \end{array}$$

Exercice 9.

Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P - (X - 2)P'$

1. Montrer que f est une application linéaire
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.
4. Déterminer la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$.
5. Montrer que $\beta' = (1, X - 2, (X - 2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. Déterminer la matrice de passage P de β à β'. Calculer P^{-1}.
7. Quelle est la matrice de f dans la base β'.

Correction exercice 9.

1. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) - (X - 2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 - (X - 2)(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2')$$
$$= \lambda_1(P_1 - (X - 2)P_1') + \lambda_2(P_2 - (X - 2)P_2') = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$$

Donc f est linéaire.

2. f est un endomorphisme si l'image de $\mathbb{R}_2[X]$ par f est $\mathbb{R}_2[X]$, autrement dit il faut que l'image d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 soit un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Première méthode

$$f(aX^2 + bX + c) = aX^2 + bX + c - (X - 2)(2aX + b)$$
$$= aX^2 + bX + c - (2aX^2 + bX - 4aX - 2b) = -aX^2 + 4aX + c - 2b$$

C'est bon, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (parce qu'il est clair que f est linéaire d'après la première question).

Deuxième méthode

$$d°P \leq 2 \Rightarrow d°P' \leq 1$$

Donc

$$d°(X-2)P' \leq 1+1=2$$

Par conséquent

$$d°f(P) \leq 2$$

Troisième méthode

Comme $f(aX^2+bX+c) = af(X^2)+bf(X)+cf(1)$, il suffit de vérifier que $d°f(X^2) \leq 2$, $d°f(X) \leq 2$ et que $d°f(1) \leq 2$, ce qui est le cas car

$$f(X^2) = X^2-(X-2)\times 2X = -X^2+4X;$$
$$f(X) = X-(X-2)\times 1 = 2;$$
$$f(1) = 1-(X-2)\times 0 = 1$$

3.

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P)=0 \Leftrightarrow -aX^2+4aX+c-2b=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a=0 \\ 4a=0 \\ c-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=2b \end{cases}$$
$$P = bX+2b = b(X+2)$$

Les polynômes de $\ker(f)$ sont proportionnels aux polynômes $X+2$, il s'agit d'une droite vectorielle dont une base est le polynôme $X+2$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim\big(Im(f)\big) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) \Leftrightarrow 1+\dim\big(Im(f)\big) = 3 \Leftrightarrow \dim\big(Im(f)\big) = 2$$
$$f(X^2) = -X^2+4X; f(X) = 2$$

Ces deux polynômes ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $Im(f)$ qui est de dimension 2, c'est une base de $Im(f)$.

Remarque :

$f(1)=1$ est proportionnel au vecteur (polynôme) $f(X)=2$.

4.

$$f(X^2) = 4X-X^2; f(X)=2; f(1)=1$$

Par conséquent

$$A = Mat_{(1,X,X^2)}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

5.

$$\alpha \times 1 + \beta(X-2) + \gamma(X-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta X-2\beta+\gamma X^2-4\gamma X+4\gamma = 0$$
$$\Leftrightarrow \gamma X^2+(\beta-4\gamma)X+\alpha-2\beta+4\gamma = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=0 \\ \beta-4\gamma=0 \\ \alpha-2\beta+4\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=0 \\ \beta=0 \\ \alpha=0 \end{cases}$$

β' est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base.

6.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & X-2 & (X-2)^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

$$PX=Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=y_1\\ x_2-4x_3=y_2\\ x_3=y_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=2x_2-4x_3+y_1\\ x_2=4x_3+y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=2(y_2+4y_3)-4y_3+y_1\\ x_2=y_2+4y_3\\ x_3=y_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=y_1+2y_2+4y_3\\ x_2=y_2+4y_3\\ x_3=y_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Remarque :

On rappelle que P^{-1} est la matrice de passage de β' à β, cela signifie que

$$1=1$$
$$X=2\times 1+1\times (X-2)$$
$$X^2=4\times 1+4\times (X-2)+1\times (X-2)^2$$

7.

$$f(1)=1$$
$$f(X-2)=X-2-(X-2)\times 1=0$$
$$f((X-2)^2)=(X-2)^2-(X-2)\times 2(X-2)=-(X-2)^2$$

Donc

$$D=Mat_{\beta'}(f)=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X-2) & f((X-2)^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}1\\ X-2\\ (X-2)^2\end{array}\end{array}$$

Deuxième méthode

On calcule

$$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

On trouve bien sûr le même résultat (cela fait partie du cours).

Exercice 10.

Soit $u:\mathbb{R}_2[X]\to \mathbb{R}[X]$ une application définie pour tout $P\in \mathbb{R}_2[X]$ par

$$u(P)=P+(1-X)P'+2P''$$

On appelle $P_1=1-X, P_2=1$ et $P_3=1+2X-X^2$

On appelle $\beta=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\beta'=(P_1,P_2,P_3)$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
4. Montrer que β' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.

Correction exercice 10.

1. Soient $P,Q\in \mathbb{R}_2[X]$, soient $\lambda,\mu\in \mathbb{R}$

$$u(\lambda P+\mu Q)=(\lambda P+\mu Q)+(1-X)(\lambda P+\mu Q)'+2(\lambda P+\mu Q)''$$
$$=\lambda P+\mu Q+(1-X)(\lambda P'+\mu Q')+2(\lambda P''+\mu Q'')$$
$$=\lambda(P+(1-X)P'+2P'')+\mu(Q+(1-X)Q'+2Q'')=\lambda u(P)+\mu u(Q)$$

Donc u est linéaire.

2. Si $d°P\leq 2$ alors $d°(1-X)P'\leq 2$ et $d°P''\leq 0$ donc $d°u(P)\leq 2$. Alors u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. $u(1)=1+(1-X)\times 0+2\times 0=1$; $u(X)=X+(1-X)\times 1=1$ et
$$u(X^2)=X^2+(1-X)\times 2X+2\times 2=-X^2+2X+4=4+2X-X^2$$
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} u(1) & u(X) & u(X^2) \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$
4. Pour tous λ_1,λ_2 et λ_3 réels
$$\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3=0\Rightarrow \lambda_1(1-X)+\lambda_2\times 1+\lambda_3(1+2X-X^2)=0$$
$$\Rightarrow -\lambda_3X^2+(-\lambda_1+2\lambda_3)X+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=0\Rightarrow \begin{cases} -\lambda_3=0 \\ -\lambda_1+2\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3=0 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0 \end{cases}$$
Donc (P_1,P_2,P_3) est une famille libre à 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base.
5.
$$u(P_1)=u(1-X)=u(1)-u(X)=1-1=0$$
$$u(P_2)=u(1)=1=P_2$$
$$u(P_3)=u(1+2X-X^2)=u(1)+2u(X)-u(X^2)=1+2-(4+2X-X^2)=-1-2X+X^2$$
$$=-P_3$$
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} u(P_1) & u(P_2) & u(P_3) \end{array} \\ D= & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}$$

Exercice 11.

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base β est :
$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur a qui engendre le noyau de u.
2. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrer que $E_\lambda=\{x\in\mathbb{R}^4, u(x)=\lambda x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Trouver un vecteur directeur b de E_{-1}. Déterminer une base (c,d) de E_1.
4. Montrer que $\beta'=(a,b,c,d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Déterminer la matrice de u dans la base β'.

Correction exercice 11.

1.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker(u)\Leftrightarrow u(x)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow AX=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\-3&1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-x_2+x_4=0\\x_1+x_4=0\\x_3=0\\-3x_1+x_2-2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-x_2+x_4=0\\x_1=-x_4\\x_3=0\\-3x_1+x_2-2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x_4-x_2+x_4=0\\x_1=-x_4\\x_3=0\\3x_4+x_2-2x_4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-x_4\\x_1=-x_4\\x_3=0\\x_2=-x_4\end{cases}$$

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-x_4,-x_4,0,x_4)=x_4(-1,-1,0,1)$$

$a=(-1,-1,0,1)$ engendre $\ker(u)$.

2. $u(0_{\mathbb{R}^4})=0_{\mathbb{R}^4}=\lambda 0_{\mathbb{R}^4}$, donc $0_{\mathbb{R}^4}\in E_\lambda$

Soient x et y deux vecteurs de E_λ, on a $u(x)=\lambda x$ et $f(y)=\lambda y$

Par conséquent

$$u(\alpha x+\beta y)=\alpha u(x)+\beta u(y)=\alpha\lambda x+\beta\lambda y=\lambda(\alpha x+\beta y)$$

Ce qui montre que $\alpha x+\beta y\in E_\lambda$

E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E_{-1}\Leftrightarrow u(x)=-x\Leftrightarrow AX=-X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\-3&1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-x_2+x_4=-x_1\\x_1+x_4=-x_2\\x_3=-x_3\\-3x_1+x_2-2x_4=-x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2+x_4=0\\x_1+x_2+x_4=0\\2x_3=0\\-3x_1+x_2-x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2+x_4=0\\x_1+x_2+x_4=0\\2x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow L_2+L_1\begin{cases}3x_1-x_2+x_4=0\\4x_1+2x_4=0\\x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2+x_4=0\\x_4=-2x_1\\x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=x_1\\x_4=-2x_1\\x_3=0\end{cases}$$

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_1,0,-2x_1)=x_1(1,1,0,-2)$$

$b=(1,1,0,-2)$ engendre E_{-1}.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E_1\Leftrightarrow u(x)=x\Leftrightarrow AX=X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\-3&1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-x_2+x_4=x_1\\x_1+x_4=x_2\\x_3=x_3\\-3x_1+x_2-2x_4=x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_4=0\\x_1-x_2+x_4=0\\0=0\\-3x_1+x_2-3x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}x_1-x_2+x_4=0\\-3x_1+x_2-3x_4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2+3L_2\end{matrix}\begin{cases}x_1-x_2+x_4=0\\-2x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=0\end{cases}$$

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-x_4,0,x_3,x_4)=x_3(0,0,1,0)+x_4(-1,0,0,1)$$

On pose $c=(0,0,1,0)$ et $d=(-1,0,0,1)$, (c,d) engendrent E_1, de plus ils ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre, c'est une base de E_1.

4. Première méthode

$$\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la troisième colonne

$$\det(a,b,c,d)=\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{array}{c}L_1+L_3\\L_2\\L_3\end{array}\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

En développant par rapport à la troisième colonne

Donc (a,b,c,d) est une base de $\mathbb{R}^4$.

Deuxième méthode

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha+\beta-\delta=0\\ -\alpha+\beta=0\\ \gamma=0\\ \alpha-2\beta+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha+\beta-\delta=0\\ \alpha=\beta\\ \gamma=0\\ \alpha-2\beta+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\delta=0\\ \alpha=\beta\\ \gamma=0\\ -\beta+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta=0\\ \alpha=\beta\\ \gamma=0\\ \beta=0\end{cases}$$

(a,b,c,d) est une famille libre à 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4, c'est une base.

5. D'après les questions précédentes on a

$$u(a)=0_{\mathbb{R}^4};u(b)=-b;u(c)=c\quad\text{et}\,u(d)=d$$

Donc

$$Mat_{\beta'}(u)=\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc}u(a) & u(b) & u(c) & u(d)\end{array}$$
$$Mat_{\beta'}(u)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}$$

Exercice 12.

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A=Mat_\beta(u)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2 & -2\\ -2 & 3 & -2 & -2\\ -2 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

On pose $a_1=e_1+2e_2+3e_3-2e_4$, $a_2=e_2+e_3$, $a_3=e_1+3e_2+5e_3-3e_4$ et $c=-e_1-e_2-e_3$

On pose $F=Vect(a_1,a_2,a_3)$.

1. Montrer que $\beta'=(a_1,a_2,a_3,c)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice P de passage de β à β'.
2. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
3. Montrer que pour tout $x\in F$, $u(x)\in F$ en déduire que $v: F\to F$ définie par $v(x)=u(x)$ est un endomorphisme de F, déterminer la matrice de v dans la base $\beta_a=(a_1,a_2,a_3)$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^4=F\oplus Vect(c)$.
5. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^4$ il existe un unique couple de vecteurs $(f,g)\in F\times Vect(c)$ tels que : $x=f+g$, calculer $u(x)$.

Correction exercice 12.

1. Première méthode

$$\det(a_1,a_2,a_3,c)=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_1 & C_2 & C_3 & C_4\end{matrix}\\ \begin{vmatrix}1&0&1&-1\\2&1&3&-1\\3&1&5&-1\\-2&0&-3&0\end{vmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_1 & C_2 & C_3-C_1 & C_4+C_1\end{matrix}\\ \begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&-1&1\\3&1&-2&2\\-2&0&1&-2\end{vmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\begin{vmatrix}2&1&3\\3&1&5\\-2&0&-3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{array}{c}L_1\\L_2-L_1\\L_3\end{array}\begin{vmatrix}2&1&3\\1&0&2\\-2&0&-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2\\-2&-3\end{vmatrix}=-1$$

Deuxième méthode pour tous $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ réels

$$\alpha a_1+\beta a_2+\gamma a_3+\delta c=0_{\mathbb{R}^4}\Rightarrow\alpha(1,2,3,-2)+\beta(0,1,1,0)+\gamma(1,3,5,-3)+\delta(-1,-1,-1,0)$$

$$=(0,0,0,0)\Rightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{array}\begin{cases}\alpha+\gamma-\delta=0\\2\alpha+\beta+3\gamma-\delta=0\\3\alpha+\beta+5\gamma-\delta=0\\-2\alpha-3\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2-2L_1\\L_3-3L_1\\L_4+L_2\end{array}\begin{cases}\alpha+\gamma-\delta=0\\\beta+\gamma+\delta=0\\\beta+2\gamma+2\delta=0\\\beta-\delta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3-L_2\\L_4-L_2\end{array}\begin{cases}\alpha+\gamma-\delta=0\\\beta+\gamma+\delta=0\\\gamma+\delta=0\\\gamma-\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\\L_4-L_3\end{array}\begin{cases}\alpha+\gamma-\delta=0\\\beta+\gamma+\delta=0\\\gamma+\delta=0\\-2\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\\\delta=0\end{cases}$$

On aurait pu faire mieux dans le calcul, mais c'est « histoire faire » une méthode de Gauss jusqu'au bout. Bref, $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$, donc (a_1,a_2,a_3,c) est une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, c'est une base.

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\2&1&3&-1\\3&1&5&-1\\-2&0&-3&0\end{pmatrix}$$

2. Les coordonnées de $u(a_1)$ dans la base β sont $\begin{pmatrix}-1&2&-2&-2\\-2&3&-2&-2\\-2&2&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-2\end{pmatrix}$

Donc $u(a_1)=e_1+2e_2+3e_3-2e_4=a_1$

Les coordonnées de $u(a_2)$ dans la base β sont $\begin{pmatrix}-1&2&-2&-2\\-2&3&-2&-2\\-2&2&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

Donc $u(a_2)=e_2+e_3=a_2$

Les coordonnées de $u(a_3)$ dans la base β sont $\begin{pmatrix}-1&2&-2&-2\\-2&3&-2&-2\\-2&2&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\\-3\end{pmatrix}$

Donc $u(a_3)=e_1+3e_2+5e_3-3e_4=a_3$

Les coordonnées de $u(c)$ dans la base β sont $\begin{pmatrix}-1&2&-2&-2\\-2&3&-2&-2\\-2&2&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

Donc $u(c)=e_1+e_2+e_3=-c$

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

3. $u(a_1) = a_1 \in F$, $u(a_2) = a_2 \in F$ et $u(a_3) = a_3 \in F$, (a_1, a_2, a_3) est une base de F donc pour tout $x \in F, u(x) \in F$.
   Pour tout $x \in F$, $v(x) = u(x) \in F$, et v est linéaire donc v est un endomorphisme de F.
$$Mat_{(a_1,a_2,a_3)}(v) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(a_1) & u(a_2) & u(a_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \end{array}$$
4. (a_1, a_2, a_3) est une base de F, (c) est une base de $Vect(c)$, et (a_1, a_2, a_3, c) est une base de $\mathbb{R}^4$, donc
$$\mathbb{R}^4 = F \oplus Vect(c)$$
5. Par définition de la somme directe, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$ il existe un unique $f \in F$ et un unique $g \in Vect(c)$ tel que $x = f + g$.
$$u(x) = u(f + g) = u(f) + u(g) = f - g$$

Exercice 13.
Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire f définie par
$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3; f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3; f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$
On note $f^2 = f \circ f$.
1. Déterminer la matrice de f dans β.
2. Montrer que $E_1 = \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$ et que $N_{-1} = \ker(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer a, b deux vecteurs tels que $E_1 = Vect(a)$ et $N_{-1} = Vect\big(b, f(b)\big)$. A-t-on $E_1 \oplus N_{-1} = \mathbb{R}^3$?
4. Montrer que $\beta' = \big(a, b, f(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. On appelle $\beta' = \big(a, b, f(b)\big)$, quelle est la matrice de f dans β'.
6. Quelle est la matrice de f^2 dans β'

Correction exercice 13.
1.
$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_1) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$
2. Soient $x \in E_1$, $(f - id_{\mathbb{R}^3})(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(x) - x = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(x) = x$
$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$$
   Soient x, x' deux vecteurs de E_1 donc $f(x) = x$ et $f(x') = x'$, soient λ, λ' deux réels
$$f(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f(x) + \lambda' f(x') = \lambda x + \lambda' x'$$
   Cela entraine que $\lambda x + \lambda' x' \in E_1$, par conséquent E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Soient $x \in N_{-1}$, $(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f^2(x) + x = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f^2(x) = -x$
$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow f^2(0_{\mathbb{R}^3}) = f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in N_{-1}$$
   Soient x, x' deux vecteurs de N_{-1} donc $f^2(x) = -x$ et $f^2(x') = -x'$, soient λ, λ' deux réels
$$f^2(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f^2(x) + \lambda' f^2(x') = \lambda(-x) + \lambda'(-x') = -(\lambda x + \lambda' x')$$
   Cela entraine que $\lambda x + \lambda' x' \in N_{-1}$, par conséquent$N_{-1}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque :
   On peut aller plus vite en remarquant que $f + id_{\mathbb{R}^3}$ est une application linéaire et en invoquant le fait que le noyau d'une application linéaire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Et puis pareil pour $f^2 + id_{\mathbb{R}^3}$.

3.

$$x \in E_1 \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 - x_3 = x_1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = x_2 \\ 3x_1 - 8x_2 + 6x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Maintenant on peut appliquer la méthode du pivot de Gauss (à l'étape d'avant ce n'était pas possible).

$$x \in E_1 \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + 3L_1 \end{matrix} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$x = (x_3, x_3, x_3) = x_3(1,1,1)$$

E_1 est la droite vectoriel engendrée par le vecteur $a = (1,1,1), E_1 = Vect(a)$.

$$x \in E_1 \Leftrightarrow f^2(x) = -x \Leftrightarrow A^2X = -X$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - x_3$$

$$x = (x_2 - x_3, x_2, x_3) = x_2(1,1,0) + x_3(-1,0,1)$$

On cherche un vecteur de N_{-1}, prenons $x_2 = 1$ et $x_3 = 0$: $b = (1,1,0) = e_1 + e_2$

$$f(b) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = 2e_2 + 3e_3 + 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 = 2e_1 - 3e_2 - 5e_3$$

Il faut vérifier que ce vecteur est bien dans N_{-1}, $x_1 - x_2 + x_3 = 2 — 3 + (-5) = 0$, c'est bon, $f(b) \in N_{-1}$ ensuite il faut montrer que $(b, f(b))$ est une base de N_{-1}. $\dim(N_{-1}) < 3$ or $(b, f(b))$ est une famille libre (car b et $f(b)$ ne sont pas proportionnels) dans un espace de dimension inférieur ou égale à 2, cela entraine à la fois que $\dim(N_{-1}) \geq 2$, qu'alors $\dim(N_{-1}) = 2$ et que $(b, f(b))$ est une base de cet espace.

Il y a plusieurs méthode possible, la plus basique est de montrer que $(a, b, f(b))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on passe, c'est trop facile. Deuxième méthode, soit $x \in E_1 \cap N_{-1}$,

$x \in E_1 \Leftrightarrow f(x) = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x) = x$ et $x \in N_{-1} \Leftrightarrow f^2(x) = -x$, cela entraine que $-x = x \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^3}$, autrement dit $E_1 \cap N_{-1} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Comme $\dim(E_1) + \dim(N_{-1}) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, on en déduit que $E_1 \oplus N_{-1} = \mathbb{R}^3$.

Remarque :

Sans rien faire de plus on peut en déduire que β' est une base.

4. Il faut d'abord calculer $f(a), f(b)$ et $f(f(b))$ dans la base $(a, b, f(b))$

   $f(a) = a$ car $a \in E_1$.

   $f(b) = f(b)$ çà c'est sûr ! et $f(f(b)) = f^2(b) = -b$

   On en déduit la matrice de f dans la base $(a, b, f(b))$

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} f(a) & f(b) & f^2(b) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ f(b) \end{matrix} \end{array}$$

5. Il faut calculer $f^2(a), f^2(b)$ et $f^2(f(b))$ dans la base $(a, b, f(b))$

$$f^2(a) = f(f(a)) = f(a) = a$$

$$f^2(b) = -b$$
$$f^2\big(f(b)\big) = f^3(b) = f\big(f^2(b)\big) = f(-b) = -f(b)$$

Donc la matrice est

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} f^2(a) & f^2(b) & f^3(b) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ f(b) \end{matrix} \end{array}$$

Autre méthode la matrice de f^2 est la matrice de f au carré

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14.

Partie I

Soit g une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$g(P) = \big(P(-1), P(1)\big)$$

1. Montrer que g est une application linéaire.
2. Déterminer une base du noyau et déterminer l'image de g.

Partie II

Soit h une application linéaire de $\mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$h(P) = \big(P(-1), P(1)\big)$$

3. Montrer que h est bijective.

Correction exercice 14.

1. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} g(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= \big((\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(1), (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(-1)\big) \\ &= \big(\lambda_1 P_1(-1) + \lambda_2 P_2(-1), \lambda_1 P_1(1) + \lambda_2 P_2(1)\big) \\ &= \lambda_1\big(P_1(-1), P_1(1)\big) + \lambda_2\big(P_2(-1), P_2(1)\big) = \lambda_1 g(P_1) + \lambda_2 g(P_2) \end{aligned}$$
Donc h est linéaire.
2. Soit $P \in \ker(g)$, $\big(P(-1), P(1)\big) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases}$
Un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 qui s'annule en -1 et en 1 est de la forme
$$P = (aX + b)(X + 1)(X - 1) = aX(X^2 - 1) + b(X^2 - 1)$$
$(X(X^2 - 1), X^2 - 1)$ forme une famille libre (car les polynômes ne sont pas proportionnels) qui engendre $\ker(g)$, c'est une base de $\ker(g)$.
Une base $\mathbb{R}^3$ est $(1, X, X^2, X^3)$
$$g(1) = (1,1); g(X) = (-1,1); g(X^2) = (1,1); g(X^3) = (-1,1)$$
L'image de g est engendré par $(1,1)$ et $(-1,1)$ (ces vecteurs ne sont pas proportionnels) ils forment donc une famille libre, bref c'est une base de $\mathcal{Im}(g)$, comme $\mathcal{Im}(g) \subset \mathbb{R}^2$ et qu'ils ont la même dimension, on en déduit que $\mathcal{Im}(g) = \mathbb{R}^2$.
3. La linéarité de h est évidente (voir 1°)).
Soit $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$ un vecteur de $\ker(h)$,
$$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$
Le noyau de h est réduit au vecteur nul, de plus d'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(h)) + \dim\big(\mathcal{Im}(h)\big) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) \Leftrightarrow \dim\big(\mathcal{Im}(h)\big) = 2$$
Donc $\mathcal{Im}(h) = \mathbb{R}_1[X]$, autrement dit h est surjective, finalement h est bijective.